

Лекция 4. Пифагорейская математика (5 век до н.э.)

План лекции:

1. Математическая школа пифагорейцев.
2. Учение о натуральных числах.
3. Открытие несоизмеримых отрезков.
4. Геометрическая алгебра.
5. Неразрешимые задачи древности.

1. Математическая школа пифагорейцев. Пятый век начался с неудачного восстания ионийских городов против персидского владычества. Восстание, в конечном счете, привело к персидским войнам, победителями из которых вышли Афины и Спарта. Совершенно разорённые Афины с великим блеском отстроились вновь и положили основание афинскому господству на море. Настало время Перикла, эпоха широчайшего расцвета и падения Афинского государства. В этот золотой век эллинской культуры были возведены великолепные храмы Акрополя, созданы скульптуры, которые в течение веков поражали людей. В этом веке творили великие трагики Эсхил, Софокл и Еврипид и историки Геродот и Фукидид.

Всюду, где распространялась афинская держава, вводилась демократия. Приверженцы аристократии – пифагорейцы – потеряли свою власть и были изгнаны из Италии. Всё большими и большими становились противоречия между демократическими Афинами и военной аристократией Спарты, пока страшная Пелопоннесская война не положила конец могуществу Афин, а вслед за тем и величю Эллады.

В области философии этот век был эпохой просвещения, временем рационализма. В широких кругах распространялись материалистические системы, вроде атомистической теории, созданной Демокритом. Старая религия и мораль осмеивались в кругах образованных людей. И все же своё наивысшее развитие философия получила лишь в следующем веке – веке Платона.

Что касается математики, то процесс её роста в пятом веке совершался, главным образом, математиками пифагорейской школы. К ним необходимо отнести уже упоминавшегося нами Гиппаса, затем Феодора из Кирены, Гиппия из Элиды и, наконец, одного из самых выдающихся пифагорейских математиков Архита Тарентского. Из математиков этого периода, не принадлежащих к школе пифагорейцев, следует назвать Гиппократы Хиосского, который, как и Фа-

лес, начал свою жизнь купцом, а потом, примерно в 430 г. до н.э., приехал в Афины и сделался очень знаменитым геометром.

Все, что мы знаем о математических исследованиях ранних пифагорейцев, основывается на отрывочных сообщениях и комментариях более поздних авторов и, прежде всего, на сообщениях Паппа и Прокла, которые жили в третьем и четвертом веках уже нашей эры. Единственный сравнительно надежный документ, дошедший до нашего времени, принадлежит Гиппократу Хиосскому и посвящен квадрированию луночек. Наконец, как мы уже отмечали на предыдущей лекции, важным источником наших знаний о математике рассматриваемого периода являются "Начала", написанные Евклидом в 4-ом веке до н.э.

Ни Пифагор, ни другие математики из числа тех, чье творчество мы будем дальше рассматривать, не интересовались прикладными задачами, считая их недостойными внимания математиков. Естественно, это не означает, что такие задачи вообще не решались. Они неизбежно возникали в коммерческой деятельности, в строительстве, землемерии. Более того, этому обучали в школах. Однако подобную деятельность называли не математикой, а **логистикой**, к которой относили операции с целыми числами, вычисления с дробями, извлечение корней, численное решение задач, сводящихся к уравнениям 1-й и 2-й степени.

2. Учение о натуральных числах. Как мы уже отмечали, значительное место в теоретических исследованиях пифагорейцев занимало учение о целом числе. Изучая свойства чисел, пифагорейцы разбили их на четные и нечетные, а также, что очень важно, на простые и составные. Составные числа, представимые в виде произведения двух сомножителей, пифагорейцы называли "плоскими" и изображали в виде прямоугольников; в виде произведения трех сомножителей – "телесными" и изображали их в виде параллелепипедов. Простые числа, которые нельзя представить в виде произведений, они называли "линейными" или "первыми". Развивая учение о четных и нечетных числах, пифагорейцы заложили основы теории делимости. Занимались они и отысканием совершенных и дружественных чисел. Пифагорейцами были найдены способы суммирования простейших арифметических прогрессий, и, в частности, доказано, что сумма первых n нечетных чисел является квадратным числом n^2 , т.е. $\sum_1^n (2k - 1) = n^2$. Был найден способ отыскания "пи-

фагорейских троек", а именно чисел $a = n$, $b = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$, $c = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$, удовлетворяющих соотношению $a^2 + b^2 = c^2$.

Учение пифагорейцев о рациональных числах развивалось в тот период в форме теории отношений и пропорций. В то время как в логистике изучались обыкновенные дроби и операции над ними, пифагорейцы, считавшие единицу неделимой, вместо дробей рассматривали отношения целых чисел. Последние были им нужны для реализации их философского принципа: отношение вещей (величин) может быть выражено отношением целых чисел. Сама процедура нахождения отношения двух однородных величин представлялась ранним пифагорейцам очень простой. Надо было найти общую меру этих величин и выяснить, сколько раз она содержится в каждой из сравниваемых величин. После этого отношение данных величин можно было выразить отношением полученных чисел.

Для нахождения общей меры был разработан особый прием попеременного вычитания из большей величины меньшей, которому было дано труднопроизносимое для нас название "антанайресис". В соответствии с этим приемом, который мы теперь называем алгоритмом Евклида, для нахождения общей меры двух отрезков следовало от большего отрезка отнять меньший столько раз, сколько это было возможно. Если получался не равный нулю остаток, то на следующем шаге такой же процедуре следовало подвергнуть новую пару: меньший отрезок предыдущей пары и полученный остаток. Ранние пифагорейцы не сомневались, что через конечное число шагов появится остаток, возможно очень маленький, который в предыдущем остатке уложится целое число раз. В конечности процесса попеременного вычитания их отчасти убеждало применение этой процедуры к числам.

На основе таких представлений и строилось учение об отношениях, пропорциях и подобии.

Основные положения теории делимости целых чисел были разработаны пифагорейцами лишь к концу 5-го века. Основные результаты этой теории изложены в VII книге "Начал" Евклида, которая представляет собой элементарный учебник теории чисел, употреблявшийся в пифагорейской школе. Она содержит несколько предложений о простых числах, но в ней нет предложений о том, что каждое число или является простым, или единственным способом может быть представлено в виде произведения простых чисел. Поэтому понятия общего наибольшего делителя и общего наименьше-

го кратного, как и понятие взаимно простых чисел, вводятся с помощью "антанайресиса" без применения разложения на простые множители. Ударение делалось не столько на свойствах делимости чисел, сколько на теории отношений и на приведении любого отношения к наименьшим числам.

Общие законы делимости целых чисел, в том числе теорема о том, что произведение двух целых чисел делится на простое число тогда и только тогда, когда на него делится, по крайней мере, один из сомножителей, как показывают исследования, были установлены только в следующем, четвертом, веке.

3. Открытие несоизмеримых отрезков. Наиболее важным среди приписываемых пифагорейцам 5-го века достижений было открытие несоизмеримых отрезков. Возникло оно, скорее всего, из попыток найти общую меру диагонали и стороны квадрата с помощью "антанайресиса". Найти её пытались уже вавилонские математики: полагая сторону квадрата равной сначала 60, потом 60^2 и, наконец, 60^3 единицам, они, пользуясь теоремой Пифагора, вычисляли длину диагонали, но ни разу не получили целочисленного значения.

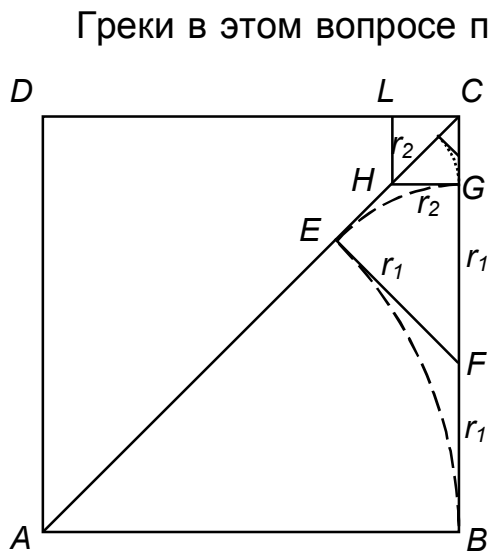


Рис. 8

Греки в этом вопросе продвинулись далеко вперед: они сумели доказать, что процесс отыскания общей меры стороны квадрата и его диагонали не может быть конечным. Действительно, пусть b – сторона квадрата $ABCD$, а a – его диагональ, и, следовательно, $a > b$ (рис.8). Пользуясь методом последовательного вычитания, отнимем от $AC = a$ отрезок $AE = b$. Остаток EC обозначим r_1 . В результате получаем новую пару отрезков: b и r_1 , где $r_1 < b$. Теперь надо от $b = BC$ отнять $r_1 = EC$.

Для этого, прежде всего, проведем EF перпендикулярно к AC . Тогда $EF = EC$ как стороны равнобедренного треугольника CEF . С другой стороны, $EF = FB$ как отрезки касательных, проведенных из точки F к дуге окружности EB . Таким образом, $EC = EF = FB = r_1$. Отняв от BC два раза отрезок r_1 , мы получим остаток $GC = r_2 < r_1$. Прежде чем отнимать от EC отрезок GC , проведем GH перпендикулярно BC . Тогда $GC = HG = EH = r_2$. Отняв от EC отрезок r_2 ,

получим неравный нулю отрезок HC . Чтобы выяснить, можно ли еще раз отнять от EC отрезок r_2 , и если можно, то сколько раз, рассмотрим квадрат $CGHL$. Оказывается, что, продолжая процесс "антанайресиса", мы вновь должны искать общую меру стороны квадрата (теперь это квадрат $CGHL$) и его диагонали. В результате процесс нахождения общей меры закичивается, становясь бесконечным.

Это открытие потрясло основы пифагорейской философии. Ведь из него следовало, что существуют отрезки, отношение которых не выражается отношением целых чисел. О том, как пифагорейцами была воспринята эта новость, можно судить по одной из связанных с этим событием легенде. В ней говорится, что ученик Пифагора, выдавший смертным эту тайну, погиб во время кораблекрушения, ниспосланного разгневанными богами (не Гиппас ли это был?).

Со временем факту несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали была придана другая, логически эквивалентная форма: если "сложить" два единичных квадрата, а затем полученный прямоугольник преобразовать в равновеликий квадрат, то сторона последнего будет несоизмерима со стороной единичного квадрата. Иначе говоря, сторона квадрата, содержащего два единичных квадрата, несоизмерима со стороной единичного квадрата. Такая формулировка наводила на мысль, что утверждение останется верным, если взять не два, а любое целое неквадратное число единичных квадратов. Доказать справедливость этого предположения сначала для трёх единичных квадратов, а затем для пяти, шести и т.д. вплоть до 17 удалось пифагорейцу Феодору из Кирены. Каким способом он проводил эти доказательства нам неизвестно. Скорее всего, он воспользовался все тем же антанайресисом.

Многие математики и тем более не математики с недоверием отнеслись к открытию несоизмеримых величин. Уж слишком оно противоречило интуиции. До этого все, что доказывали математики, имело надежный зримый образ. Более того, древнегреческие геометры сознательно, а иногда и бессознательно, стремились к такой наглядности. Открыв несоизмеримые отрезки, ученые впервые столкнулись с фактом, увидеть который было невозможно. Смущало и использование в качестве доказательства несоизмеримости отрезков *бесконечность* "антанайресиса". Сомнения усиливались широко обсуждавшимися в это время апориями (парадоксальными суждениями), в увлекательной форме сформулированными Зеноном

Элейским. Всего Зеноном было сформулировано 45 апорий, из которых до нас дошло только 9. Мы здесь ограничимся рассмотрением всего одной апории, о некоторых других речь пойдет позже. Интересующая нас апория называлась "Ахиллес". В ней Зенон доказывал, что быстроногий Ахиллес не может догнать черепаху. Действительно, чтобы догнать черепаху, Ахиллес должен сначала достичь точки P , с которой черепаха начала свое движение. Когда Ахиллес достигнет точки P , черепаха продвинется в точку P_1 . Ахиллес не может догнать черепаху, пока не попадет в точку P_1 , но черепаха при этом продвинется в новую точку P_2 , и т.д. Процесс оказывается бесконечным, и, следовательно, утверждал Зенон, Ахиллес не сможет догнать черепаху.

Так рассуждал Зенон в своей апории. Не вдаваясь в обсуждение того, что этой апорией хотел доказать Зенон и тем более какие в действительности выводы можно сделать из неё, заметим пока только, что сформулированный Зеноном вывод явно противоречил человеческому опыту и это подрывало веру в возможность использования идеи бесконечного в строгих рассуждениях. В спор о правомерности использования идеи бесконечности явно или косвенно были вовлечены многие известные в то время математики и философы.

Можно полагать, что с несоизмеримостью диагонали и стороны квадрата смирились только тогда, когда было найдено доказательство, основывающееся на разработанном пифагорейцами учении о четных и нечетных числах. Рассмотрим это доказательство, которое проводилось методом от противного.

Допустим, что диагональ квадрата AC и его сторона AB соизмеримы и их отношение равно отношению двух наименьших целых чисел m и n , то есть

$$AC : AB = m : n. \quad (1)$$

Из равенства (1) следует, что $AC^2 : AB^2 = m^2 : n^2$. Но по теореме Пифагора $AC^2 = 2AB^2$, следовательно, и

$$m^2 = 2n^2. \quad (2)$$

Значит, m^2 – четно. Из учения о четных и нечетных числах следует, что в этом случае и m – четно, так как произведение двух нечетных чисел нечетно. Поскольку m – четно, то $m = 2t$. Подставляя в (2), получим: $4t^2 = 2n^2$, или $n^2 = 2t^2$, откуда следует, что n^2 – четно, а значит и n – число четное. Получили, что и n , и m – числа четные, что противоречит тому, что они наименьшие, то есть несократимые.

Такое доказательство имеется в некоторых списках в самом конце десятой книги "Начал" Евклида.

4. Геометрическая алгебра. Связь между алгебраическими соотношениями и геометрическими объектами, прежде всего отрезками и прямоугольниками, использовалась задолго до открытия несоизмеримых величин. Можно предполагать, что вавилоняне свои правила решения квадратных уравнений получили не без опоры на чертежи, хотя, как мы уже отмечали, для них каждый отрезок, каждый прямоугольник или квадрат представлял собой просто-напросто число. В практической логистике при решении квадратных уравнений греки пользовались правилами, заимствованными из древневавилонских текстов. Так, например, при решении уравнения $x(a - x) = p$ или равносильной ему системы $xy = p, x + y = a$ выполняли следующую последовательность действий: число a делили пополам, после чего полученное частное возводили в квадрат и от него отнимали число p . Из полученной разности, если она была неотрицательной, извлекали квадратный корень, при необходимости приближенно. Наконец полученный результат прибавляли (вычитали) к половинному значению числа a .

Пифагорейцы тоже решали квадратные уравнения, но придавали им "чистую", как они считали, геометрическую форму. В частности, приведенное выше уравнение формулировалось ими в виде требования разделить данный отрезок a на две части таким образом, чтобы образуемый ими прямоугольник был равновелик заданному квадрату площадью p .

В некотором смысле эта задача была обратной задаче на преобразование прямоугольника в квадрат и решалась с помощью той же фигуры, которую мы рассматривали на предыдущей лекции (рис.7). Действительно, пусть дан отрезок $AB = a$ и квадрат площади p . Для построения точки D , делящей отрезок AB на части, образующие прямоугольник, равновеликий квадрату площадью p , достаточно выполнить следующие построения. На отрезке CB , представляющем половину отрезка AB , построить квадрат и от него, пользуясь теоремой Пифагора, отнять квадрат площадью p . Затем, отложив сторону построенного квадрата от точки C вправо, отметить точку D , выполняющую необходимое деление отрезка. Нетрудно видеть, что эта последовательность действий совпадает с рассмотренным выше алгоритмом вавилонян.

Можно полагать, что к таким геометрическим построениям ранние пифагорейцы, приверженные ко всему осязаемому и зримому, прибегали еще до открытия несоизмеримых величин, хотя в боль-

шинстве случаев относились к ним только как к иллюстрации своих алгебраических рассуждений. После открытия несоизмеримых величин ситуация существенно изменилась. Оказалось, что если не выходить за рамки пифагорейского учения о числе, то многие задачи, приводящие к квадратным уравнениям, вообще не имеют числового решения. Даже такое простое уравнение, как $x^2 = 2$, не могло быть решено ни в области целых чисел, ни даже в области отношений чисел. Но оно оказывалось вполне разрешимым в области прямолнейных отрезков: его решением являлась диагональ квадрата со стороной, равной единице. Не решаясь изменить свою трактовку числа, пифагорейцы из области чисел перешли в область геометрических величин, построив соответствующее исчисление.

Для построения такого исчисления пифагорейская математика располагала всем необходимым. Нужно было только изменить взгляд на роль чертежей, превратив их из средства наглядности в основной элемент алгебры, и логически расположить весь имеющийся материал. Эта работа была выполнена пифагорейцами, а её результаты впоследствии включены Евклидом во вторую книгу "Начал".

В этом новом исчислении, которое в 17 в. н.э. получило название "геометрической алгебры", величины стали изображать с помощью отрезков и прямоугольников. Впоследствии Евклид обосновал эти операции с помощью постулатов и аксиом геометрии. В этом исчислении сложение отрезков осуществлялось путём приставления одного из них к другому вдоль прямой, вычитание – путём отсечения от большего отрезка части, равной меньшему отрезку. Умножение осуществлялось путём построения прямоугольника на соответствующих отрезках. Складывать можно было только однородные величины: отрезки с отрезками, прямоугольники с прямоугольниками. Во втором случае возникали трудности, ибо при объединении двух прямоугольников в один было необходимо, чтобы у них была пара одинаковых сторон. Пифагорейцами для этого был разработан особый прием, позволяющий прямоугольник со сторонами, равными a и b , преобразовать в равновеликий ему прямоугольник, одна из сторон которого равнялась бы стороне d второго прямоугольника. Назывался этот прием "приложением площадей". Рассмотрим его на конкретном примере (рис.9).

Пусть требуется прямоугольник $ABDC$ преобразовать в равновеликий прямоугольник, одной из сторон которого являлся бы отрезок CE .

Для этого выполнялось следующее построение: к одной из сторон прямоугольника $ABDC$, например CD , пристраивался прямоугольник $CDFE$ с заданной стороной CE . Затем проводилась диагональ ED до пересечения в точке G с продолжением стороны AB . После этого вся фигура достраивалась до полного прямоугольника $[AA']$. Тогда прямоугольник $DD'A'F$ оказывался искомым, так как был равен прямоугольнику $ACDB$.

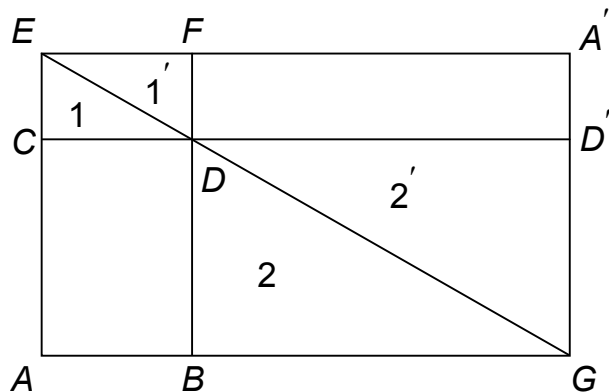


Рис. 9

Ведь оба они получались из равных треугольников AEF и $A'EG$ путём исключения равных треугольников 1 и 1', 2 и 2'.

Таким образом возникло "ступенчатое" исчисление. Деление приводило к понижению размерности и выполнялось с помощью все того же "приложения площадей".

Такое представление основных алгебраических операций не зависело от конкретных размеров величин, над которыми операции производились, а это впервые позволило строго установить важнейшие свойства алгебраических операций и вывести в общем виде основные алгебраические тождества и алгоритмы решения линейных и квадратных уравнений.

Относящийся к этому вопросу материал изложен во II книге "Начал" Евклида. Здесь в геометрической форме доказываются основные алгебраические тождества, которые используются не только в других книгах "Начал", но и в деятельности всех последующих математиков. Всего во второй книге "Начал" 14 предложений, каждое из которых может рассматриваться как некоторое алгебраическое тождество.

Предложение первое гласит: если имеются две прямые и одна из них рассечена на сколько угодно отрезков, то прямоугольник, заключающийся между этими двумя прямыми, равен вместе взятым прямоугольникам, заключенным между нерассечённой прямой и каждым из отрезков.

Этот практически очевидный факт доказывается Евклидом путём геометрического построения фигуры, соответствующей сформулированному предложению, и используется во многих последующих доказательствах.

Совершенно очевидно, что алгебраическое содержание этого предложения в современных обозначениях выражает распределительный закон: $(a + b + c + d) \cdot e = a \cdot e + b \cdot e + c \cdot e + d \cdot e$. Возможно, в глазах пифагорейцев этот почти очевидный геометрически факт служил в какой-то мере и обоснованием правила, пользуясь которым, как мы уже видели, древние греки умножали многозначные числа. Так, например, умножая число 265 на 7, они, в силу принятой у них алфавитной системы, должны были умножать на 7 каждое из чисел 200, 60 и 5.

Следующих три предложения в алгебраической форме выглядят следующим образом:

Предложение второе: $(a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b = (a + b)^2$.

Предложение третье: $(a + b) \cdot b = ab + b^2$.

Предложение четвёртое: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Соответствующие им чертежи очевидны. Возможно, и эти тождества, помимо их геометрического назначения, служили обоснованием определенных вычислительных приемов, применявшихся при умножении чисел.

Особый интерес представляют пятое и шестое предложения.

Предложение пятое: если прямая линия рассечена на равные и неравные отрезки, то прямоугольник, заключённый между неравными отрезками всей прямой, вместе с квадратом на отрезке между сечениями равен квадрату на половине.

Соответствующий этому предложению чертеж нам хорошо известен. Он приведен на рисунке 7 предыдущей лекции. Из приведенных там же рассуждений фактически следует доказательство этого предложения.

Если длины неравных отрезков, на которые рассечена данная прямая, обозначить a и b , то, как легко видеть, тождество, соответствующее этому предложению, будет иметь вид:

$$ab + \left(\frac{a + b}{2} - b \right)^2 = \left(\frac{a + b}{2} \right)^2.$$

Очевидно, это предложение служило обоснованием известного еще древним вавилонянам правила решения квадратного уравнения вида $x(a - x) = p$ или равносильной ему системе уравнений $xy = p$, $x + y = a$.

Предложение шестое: если прямая линия рассечена пополам и к ней по прямой приложена какая-либо другая прямая, то прямо-

угольник, заключённый между всей прямой с приложенной и самой приложенной вместе с квадратом на половине, равен квадрату на прямой, составленной из половины и приложенной.

Если длины данного и приставленного отрезков обозначить, соответственно, буквами a и b , то соответствующее этому предложению тождество примет вид:

$$(a + b) \cdot b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2.$$

Очевидно, это предложение служило обоснованием также известного еще древним вавилонянам правила решения квадратного уравнения вида $x(a + x) = p$.

Большинство других предложений второй книги "Начал" прямо или косвенно связано с преобразованием площадей и решением квадратных уравнений.

Завершается книга предложением 14, которое сформулировано в виде задачи: "Построить квадрат, равный данной прямолинейной фигуре". Как видим, это типичная задача на квадрирование. Начинается её решение с того, что данную фигуру преобразуют в равно-великий (в книге "равный") прямоугольник $[AG]$ (рис.10). Затем, применяя уже известную процедуру квадрирования прямоугольников (предложение 5), на продолжении стороны AD откладывается отрезок DB , равный стороне DG , после чего точкой C отрезок AB делится на две равные части. В результате все необходимые дан-ные для применения теоремы Пифагора оказываются в распоряже-

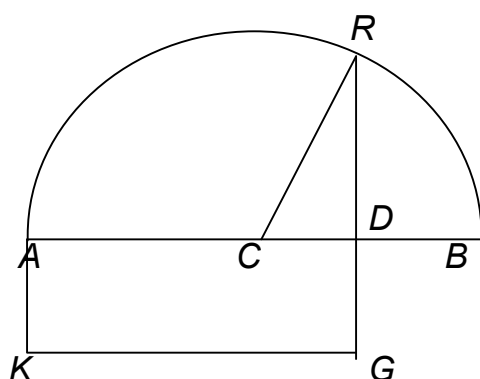


Рис. 10

нии решающего: отрезок CB – сторо-на большего квадрата и отрезок CD – сторона меньшего квадрата. Сам пря-моугольный треугольник, с помощью которого и получается квадрат, равно-великий данному прямоугольнику, строится на отрезке CD . Его второй катет RD откладывается на продол-жении стороны DG с таким расчетом, чтобы гипотенуза CR равнялась от-

резку CB . Квадрат, построенный на RD , и будет искомым.

Рассматривая доказательства всех этих "тождеств", легко заме-тить, что их справедливость не зависит от конкретной длины отрез-ков a и b , от их соизмеримости или несоизмеримости и, следова-тельно, эти "тождества" имеют место для любых величин. Отмечен-

ное обстоятельство является очень важным. Только после того как в таком общем виде стали формулировать и доказывать алгебраические тождества, стало возможным говорить об алгебре в собственном смысле слова.

Наглядность геометрической алгебры была, несомненно, большим достоинством, особенно для раннего периода развития математики. Однако то, что при этом в основном ограничивались представлением с помощью двумерных геометрических образов, оказалось весьма стеснительным для дальнейшего развития алгебры.

Сопоставляя содержание второй книги с вавилонскими текстами, легко видеть, что все без исключения нормальные вавилонские уравнения оставили свой след в арифметике и в геометрии пифагорейцев, а вавилонская традиция дала материал, из которого греки, и в частности пифагорейцы, построили свою математику.

5. Неразрешимые задачи древности. Какие вопросы геометрии, помимо проблемы несоизмеримости, были в центре внимания пифагорейцев пятого века – точно не известно. Естественно предположить, что они продолжали исследования в тех же направлениях, которые разрабатывались ими в предыдущем, шестом, столетии. Возможно, даже, что многое из того, что было нами отнесено к шестому веку, на самом деле было сделано только в пятом. Судя по всему, они продолжали свои исследования в области геометрических построений, равновеликости фигур, логического изложения геометрии.

Особое значение в их исследованиях имели три, как мы теперь знаем, неразрешимые циркулем и линейкой задачи: задача о трисекции угла, задача об удвоении куба и задача о квадратуре круга. Об этом свидетельствуют дошедшие до нас отрывки из сочинений Гиппократы, Гиппия и Архита.

Значение этих задач в том, что в поисках их решений древнегреческие математики разрабатывали новые методы, вводили новые математические объекты и тем самым закладывали основы новых областей математики.

В дальнейшем, рассматривая развитие древнегреческой математики, мы неоднократно будем обращаться к этим задачам.

Трисекция угла. Задачей трисекции угла в 5-ом веке занимался Гиппий из Элиды. По-видимому, разуверившись в возможности решить эту задачу с помощью циркуля и линейки, он для ее "решения" построил вспомогательную линию, которая впоследствии была успешно использована для квадрирования круга и поэтому была названа квадратрисой.

надо было с помощью циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий данному кругу. Историей зафиксировано несколько неудачных, зачастую примитивных попыток решения этой задачи. Первый серьезный подход к её решению совершил Гиппократ Хиосский. В дошедшем до нас отрывке, о котором мы говорили выше, Гиппократ в поисках решения задачи пришел к открытию трех квадратуемых луночек – фигур, образованных пересечением двух окружностей.

Рассмотрим первую из них, которая к тому же является и наиболее простой (рис.12). В полукруг, построенный на отрезке AC , вписывается равнобедренный треугольник ABC , после чего на катете AB как на диаметре строится полукруг AmB . Дуга AmB вместе с дугой AnB образуют луночку $AmBn$. Гиппократ доказывает, что эта луночка равновелика треугольнику AOB , откуда и следует её квадратуемость.

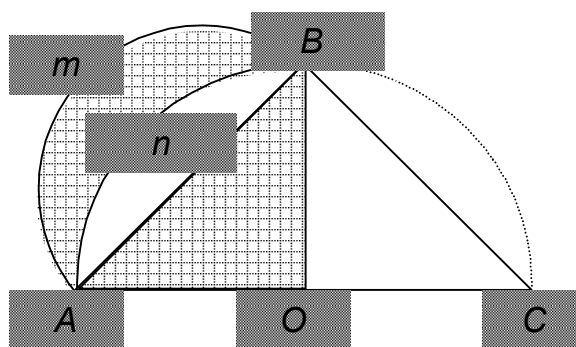


Рис. 12

Для доказательства этого предложения Гиппократ пользуется одной из своих основных лемм: "Площади подобных сегментов в двух кругах пропорциональны квадратом стягивающих их хорд". Используя эту лемму, получим:

$$\frac{\text{полукруг на } AC}{\text{полукруг на } AB} = \frac{AC^2}{AB^2}.$$

Но по теореме Пифагора, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2 \cdot AB^2$, следовательно, $\frac{\text{полукруг на } AC}{\text{полукруг на } AB} = \frac{2}{1}$, т.е. полукруг на AB равен половине полукруга на AC , т.е. сектору AOB . Если теперь от обеих частей равенства отнять сегмент AnB , то окажется, что луночка $AmBn$ равновелика треугольнику AOB . Заметим, что в построенной луночке внешняя дуга равна полуокружности.

Вторую квадратуемую луночку, в которой внешняя дуга больше полуокружности, Гиппократ построил следующим образом.

В качестве базовой фигуры взял равнобедренную трапецию, три стороны которой равны a , а четвёртая – $a\sqrt{3}$ (рис. 13).

Описав вокруг построенной трапеции $ABCD$ окружность, Гиппократ на хорде AD строит сегмент, подобный сегментам, отсекаемым остальными хордами. Тогда луночка, образованная дугой окружности $ABCD$ и дугой AnD , будет равновелика построенной трапеции $ABCD$.

найти приём «сложения» прямоугольных параллелепипедов и правило кубирования пространственных тел.

Сама же задача об удвоении куба формулировалась древнегреческими математиками как требование, пользуясь циркулем и линейкой, преобразовать данный прямоугольный параллелепипед в равновеликий куб. Именно в такой формулировке мы и будем использовать термин "удвоение куба" в дальнейшем.

В 5-м веке этой задачей занимался сначала Гиппократ Хиосский, а затем один из крупнейших пифагорейских математиков 5-4 вв. до н.э. Архит Терентский. По преданию, именно Гиппократ был первым, кто заметил, что задача будет решена, если между двумя прямолинейными отрезками a и b , находящимися в заданном отношении между собой, вставить две средние пропорциональные x и y так, чтобы: $a : x = x : y = y : b$.

Действительно, пусть задан прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием a^2 и боковым ребром b , который необходимо преобразовать в равновеликий куб. Обозначив ребро искомого куба буквой x , получим $x^3 = a^2b$. Гиппократ показал, что если удастся между отрезками a и b вставить две средние пропорциональные x и y так, что $a : x = x : y = y : b$, то x будет стороной искомого куба. Действительно, перемножив почленно пропорции: $a : x = a : x$, $a : x = x : y$ и $a : x = y : b$, получим $a^3 : x^3 = a : b$, откуда $x^3 = a^2b$. Естественно, что рассуждения Гиппократа Хиосского не могли, в такой же мере, как это сделано выше, опираться на алгебраическую символику. Какими они были на самом деле нам неизвестно. Зато известно, что каждый, кто в дальнейшем брался за решение делийской задачи, опирался на этот результат Гиппократа. При этом основной проблемой оставался вопрос, как между отрезками a и b вставить два средних пропорциональных. В четвертом веке этой задачей занимался Архит Терентский и по-видимому Менехм, использовавший для этого полученные им конические сечения.

В заключение сделаем обзор основных результатов, достигнутых математиками пятого века.

1. Планиметрия. В 5-м веке она получила существенное развитие: теория параллельных, сумма углов треугольника, площади многоугольников, пропорциональность, теорема Пифагора, углы и дуги в круге, правильные многоугольники. Эта линия нашла своё предварительное завершение в "Началах" Гиппократа. Нерешенной

оставалась проблема построения теории отношений, включающей взаимно несоизмеримые величины.

2. Теория чисел, зародившаяся в недрах числовой мистики Пифагора и принявшая строго научный характер в учении о чётном и нечётном, завершилась построением теории делимости и пропорциональности в том виде, как мы это находим в седьмой книге "Начал" Евклида.

3. Третья линия – определение площади круга. Гиппократ дал точную формулировку основного предложения о том, что площади кругов пропорциональны квадратам на диаметрах, однако доказать этот факт математики 5-го века не смогли.

4. Алгебре вавилонян была придана геометрическая форма. При применении геометрической алгебры к трехмерным объектам возникла, в качестве наиболее важной, проблема построения куба данного объёма.

5. Стереометрия была развита настолько, что Анаксагор и Демокрит могли дать первый очерк теории перспективы. Из правильных многогранников пифагорейцы знали только тетраэдр, куб и додекаэдр. Остались невыясненными количество правильных многогранников и правила их построения.

6. Была доказана несоизмеримость единичного отрезка со сторонами квадратов с площадями 3, 5, ..., 17. Нерешённой осталась общая проблема: какие стороны, производящие рациональные квадраты, сами являются рациональными?