Лекция 2. Математика в странах Древнего Востока

План лекции:

1. Древний Египет. Хронологический обзор.
2. Математика Древнего Египта.
3. Древний Вавилон. Хронологический обзор.
4. Математика древнего Вавилона.
5. Алгебра древних вавилонян.

1. Древний Египет. Хронологический обзор. Около середины 4-го тысячелетия до нашей эры в результате длительных войн между многочисленными рабовладельческими государствами, расположенными вдоль Нила, образовалось два крупных рабовладельческих государства: Верхний Египет (на юге) и Нижний Египет (на севере, в дельте Нила). Около 3000 г. до нашей эры царь Верхнего Египта, Минес, завоевал дельту Нила и объединил Египет. Период с 3-го до 2-го тысячелетия до нашей эры принято называть Древним царством. Его столицей был Мемфис. В этот период появилось иероглифическое письмо, начали возводиться пирамиды, самой большой из которых была пирамида Хеопса близ Мемфиса. Во второй половине 3-го тысячелетия Египет распался на несколько государств, которые в 21 веке были вновь объединены в единое государство со столицей в г. Фивы.

Период с 21-го по 18-й век называют Средним царством. Считается, что в этот период появился папирус и иератическое письмо, расцвела литературы, ювелирное дело. Носителями научных знаний были так называемые писцы – чиновники, состоящие на государственной или храмовой службе. Служилая интеллигенция, гордившаяся своей образованностью (сам фараон был титулован «писцом большой книги»), выполняла в древнем обществе различные административно-хозяйственные функции. В папирусах 20 и 19 вв. до нашей эры зафиксированы должности писца дома документов, войска, царских работ, надзирателя писцов, начальника сокровищницы и т.д. «Писец, – говорится в одном из папирусов, – руководит всеми, и не обложена налогами работа в письме. Это больше, чем любая должность, и нет ничего равного им в стране этой». Считается, что именно в этот период были написаны математические папирусы Ринда и Московский.

В 18 в. до н.э. произошло крупное восстание свободной бедноты и рабов, а в 17 в. Египет был завоеван гиксосами, кочевыми племенами, пришедшими из Азии. Именно в этот период Ахмес переписал дошедший до нас папирус Ринда.

С изгнанием гиксосов в 16 веке до нашей эры начался период так называемого Нового царства. Для него характерны многочисленные длительные войны, в результате которых Палестина, Сирия и Нубия становятся египетскими провинциями. В самом Египте ведется грандиозное строительство: возводятся многочисленные дворцы и храмы, скульптура. Зарождается новое богословие и первая, очень примитивная наука о звездах.

В 12 в. до н.э. Египет ослабел и утратил все свои азиатские владения. Обострилась классовая борьба. Усилилось жречество, завладевшее в 11 в. до н.э. Фивами. В 941 г. до н.э. власть в Египте захватил предводитель ливийских наёмных воинов, при котором жречество и военная аристократия замкнулись в привилегированные касты, развилось долговое рабство. В 671 г. до н.э. Египет был завоеван ассирийцами, однако уже в 654 г. он вернул себе независимость и был объединен Псамметихом I. Столицей стал г. Саис (в дельте Нила). В 525 г. до н.э. Египет вновь был завоеван, на этот раз персидским царем Камбизом, а в 332 до н.э. – Александром Македонским. С 305 по 30 г. до н.э. в Египте правила македонская династия Птолемеев. Столицей страны стала Александрия, превратившаяся в центр греческого искусства и науки. Появилась астрология. Арифметические и астрономические познания коренного населения страны оставались очень примитивными. В 30 г. до н.э. Египет был завоеван Римом.

2. Математика Древнего Египта. Наши познания о математике Древнего Египта основаны, главным образом, на двух больших папирусах математического характера и на нескольких небольших отрывках. Один из больших папирусов носит название математического папируса Райнда (по имени обнаружившего его учёного) и находится в Лондоне. Он имеет приблизительно 5,25 метров в длину и 33 см в ширину. Другой большой папирус, почти такой же длины и 8 см в ширину, находится в Москве. Кроме того, имеется несколько небольших отрывков в Берлине, Лондоне, Каире. Содержащиеся в этих папирусах математические сведения относятся примерно к 2000 г. до нашей эры.

Папирус Райнда представляет собой собрание 84 задач прикладного характера, при решении которых производятся действия с дробями, вычисляются площади прямоугольников, треугольников, трапеций, кругов, а также объёмы параллелепипедов, цилиндра, пирамиды. Площадь круга вычисляется по правилу, которое можно выразить формулой $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, что соответствует значению $\pi = 3.1605$.

Имеются также задачи на пропорциональное деление, а в одной из задач находится сумма геометрической прогрессии.

В Московском папирусе собраны решения 25 задач. Большинство из них такого же типа, как и в папирусе Райнда. Вместе с тем, имеются и принципиально отличные от них задачи. В одной из таких задач (№14) правильно вычисляется объём усечённой пирамиды с квадратным основанием. В другой задаче (№10) содержится самый ранний в математике пример определения площади кривой поверхности: вычисляется боковая поверхность корзины, т.е. полуцилиндра, высота которого равна диаметру основания. Заметим, что ни в этих, ни в других дошедших до нашего времени документах нет указаний на то, что египтяне имели какое-либо представление о теореме Пифагора.

Все эти тексты относятся к числу практических орудий ремесла писцов, которые играли в Древнем Египте очень важную роль.

Содержание папирусов свидетельствует, что ко времени их написания у египтян уже сложилась определённая система счисления: десятичная, иероглифическая. Для узловых чисел вида $10^k (k = 0,1,2,..7)$ были установлены индивидуальные иероглифы, приведенные в приложении 1. Алгоритмические числа записывались с помощью узловых чисел по принципу аддитивности. С помощью этой системы египтяне справлялись со всеми вычислениями, в которых употребляются целые числа. Что касается дробей, то египтяне создали специальный аппарат, опиравшийся на понимание дроби как доли единицы. В силу этого представления употреблялись лишь дроби вида $\frac{1}{n}$, которые в истории математики называют аликвотными и обозначают $\overline{n}$. Особые обозначения имели дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. Для обозначения дроби $\frac{2}{3}$ в истории математики используется символ $\overline{\overline{3}}$. Все результаты, которые мы выражаем дробями вида $\frac{n}{m}$, выражались суммой аликвотных дробей. При этом, в соответствии с принципом аддитивности, между слагаемыми знак суммы не ставился, например, результат деления 2 на 5 представлялся двумя аликвотными дробями $\overline{3}$ и $\overline{15}$ и записывался в виде $\overline{3}\,\overline{15}$, а не в виде $\overline{3}+\overline{15}$. Аналогично результат деления 2 на 15 записывался в виде $\overline{10}\,\overline{30}$.

В папирусе Райнда имеется специальная таблица, в которой приводятся результаты деления числа 2 на нечетные числа от 3 до 101. Таблица эта, по-видимому, составлялась долгое время, опытным путем и в дошедшем до нас виде представляет просто сводку достигнутых результатов. В настоящем пособии она приведена в таблице 3 приложения.

Существовали также определённые приемы производства математических операций с целыми числами и дробями. При этом почти все процедуры по возможности сводились к сложению. Совместно с примитивным пониманием дроби только как части единицы эта особенность обусловила своеобразный характер вычислений. В дошедших до нас папирусах не объясняется, как производилось сложение целых чисел. Очевидно, эта операция была хорошо известна. Для сложения аликвотных дробей с разными знаменателями их просто записывали рядом. Лишь изредка применялась процедура, в определенном смысле напоминающая привычное нам действие с дополнительными множителями. Обычно к этому приему прибегали тогда, когда приходилось искать дроби, дополняющие данное число до ближайшего целого. Способы подбора этих вспомогательных чисел не дают, однако, права судить об этом приёме как о единообразном процессе, адекватном способу приведения дробей к общему знаменателю. Исторические реконструкции во многом ещё спорны и не подтверждены достаточным количеством фактов.

При умножении целых чисел использовался преимущественно способ последовательного удвоения множимого с последующим отбором тех промежуточных множителей (чисел в первом столбце), сумма которых равна множителю, и сложения соответствующих ча-

$(12\cdot 12)$	1	12
	2	24
	* 4	48
	* 8	96
Вместе		144

$(16\cdot 16)$	* 1	16
	* 10	160
	* 5	80
Вместе		256

$(27\cdot 23)$	* 1	27
	10	270
	* 20	540
	* 2	54
Вместе		621

стных произведений (в нашем случае складываемые строки отмечены звёздочками). Однако иногда вместо удвоения применялось умножение на десять и деление на два. Ниже рассматриваются три заимствованных из папирусов примера на умножение целых чисел.

В первом из них умножение выполнено по правилу: $12\cdot 12 = 12\cdot(4+8) = 48+96 = 144$, во втором – по правилу: $16\cdot 16 = 16\cdot(1+10+5) = 16+160+80 = 256$, а в третьем – по правилу: $27\cdot 23 = 27\cdot(1+20+2) = 27+540+54 = 621$.

Аналогичным образом на целые числа умножали и дроби. В приведенном ниже примере (левая таблица) дробь $1\,\overline{2}\,\overline{5}$ (или

$(1\,\overline{2}\,\overline{5}\cdot 12)$	1	$1\,\overline{2}\,\overline{5}$
	2	$3\,\overline{3}\,\overline{15}$
	* 4	$6\,\overline{\overline{3}}\,\overline{10}\,\overline{30}$
	* 8	$13\,\overline{3}\,\overline{5}\,\overline{15}$
Вместе $20\,\overline{5}\,\overline{10}\,\overline{15}\,\overline{30}$		

$(\overline{\overline{3}}\,\overline{5}\,\overline{30}\cdot 10)$	1	$\overline{\overline{3}}\,\overline{5}\,\overline{30}$
	* 2	$1\,\overline{\overline{3}}\,\overline{10}\,\overline{30}$
	* 4	$3\,\overline{3}\,\overline{5}\,\overline{15}$
	* 8	$7\,\overline{5}$
Вместе $8\,\overline{\overline{3}}\,\overline{5}\,\overline{10}\,\overline{30}$ или 9		

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$) умножается на 12.

При первом удвоении получим число $2+1+\frac{2}{5}$. Так как $\frac{2}{5}$, в соответствии с таблицей 3 приложения, равно $\overline{3}\ \overline{15}$ или $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$, то во второй строке получится число $3+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ (или $3\,\overline{3}\,\overline{15}$).

При втором удвоении получим число $6+\frac{2}{3}+\frac{2}{15}$. Так как $\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$, то в третьей строке получится число $6+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$ (или $6\,\overline{\overline{3}}\,\overline{10}\,\overline{30}$).

При третьем удвоении получим $13+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$ (или $13\,\overline{3}\,\overline{5}\,\overline{15}$).

Сложив числа в четвертой и пятой строках, получим "вместе" $20+\frac{!}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$ (или $20\,\overline{5}\,\overline{10}\,\overline{15}\,\overline{30}$).

Предлагаем теперь самостоятельно разобраться в умножении $(\overline{\overline{3}}\,\overline{5}\,\overline{30}\cdot 10)$, приведенном в правой таблице.

По-видимому, самой трудной математической операцией для египтян было деление. В этом случае также использовалась процедура последовательного удвоения и раздвоения (деления на два), но теперь уже не множителя, а делителя. Затем из промежуточных произведений (чисел из второго столбца) отбираются те, сумма которых равна делимому (в нашем случае они отмечены звездочками), после чего ищется сумма соответствующих чисел из первого столбца. Иногда в качестве промежуточного действия применялось нахождение двух третей или одной десятой доли числа и т.п.

Ниже рассматриваются три заимствованных из папирусов примера на деление целых чисел.

$(19:8)$		
	1	8
	*2	16
	$\overline{2}$	4
	*$\overline{4}$	2
	*$\overline{8}$	1
$19:8=2\overline{4}\,\overline{8}$		

$(16:3)$		
	*1	3
	2	6
	*4	12
	$\overline{\overline{3}}$	2
	*$\overline{3}$	1
$16:3=5\overline{3}$		

$(4:15)$		
	1	15
	$\overline{10}$	$1\overline{2}$
	*$\overline{5}$	3
	*$\overline{15}$	1
$4:15=\overline{5}\,\overline{15}$		

В первом из них деление выполнено по правилу: $8\cdot\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=16+2+1=19$ откуда $19:8=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=2\ \overline{4}\ \overline{8}$.

Во втором: $3\cdot\left(1+4+\frac{1}{3}\right)=3+12+1=16$, откуда $16:3=5+\frac{1}{3}=5\overline{3}$.

В третьем: $15\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right)=3+1=4$, откуда $4:15=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\overline{5}\overline{15}$

1	365
2	730
4	1460
*8	2920
*$\overline{\overline{3}}$	$243\,\overline{3}$
*$\overline{10}$	$36\,\overline{2}$
*$\overline{2190}$	$\overline{6}$
Вместе: $8\,\overline{\overline{3}}\,\overline{10}\,\overline{2190}$	

В заключение рассмотрим следующую заимствованную из папируса задачу с решением: "Сало. Годовой сбор 10 беша. Какой ежедневный сбор? Обрати 10 беша в ро. Это будет 3200 (ро). Обрати год в дни. Это будет 365. Раздели 3200 на 365. Это $8\overline{\overline{3}}\,\overline{10}\,\overline{2190}$ (ро в день)". Делай, как делается":

В левом столбце производится постепенный подбор частного. Первый результат: 8 даёт разницу между истинным и частичным делимым: $3200-2920=280$. Множитель $\frac{2}{3}$ даёт: $365\cdot\frac{2}{3}=243\frac{1}{3}$. Ещё до 280 не хватает $36\frac{2}{3}$. Очередной подбор $\frac{1}{10}$ даёт уже разницу в $\frac{1}{6}$ (так как

$36\frac{2}{3}-36\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\Big)$. Остаётся только подобрать число, которое, будучи умножено на 365, дало бы $\frac{1}{6}$. Это $\frac{1}{2920}$.

Таким образом, частное отыскивается постепенным подбором, для которого ещё нет единого метода. Часто встречается операция, называемая "хау" (куча) и соответствующая решению линейного уравнения вида $ax+bx+\ldots+cx=m$.

Анализируя дошедшие до нас математические папирусы, надо иметь в виду, что это не записи нерадивых учеников, а учебные материалы, предназначенные для обучения самой образованной части населения Египта. Содержащиеся в папирусах материалы позволяют утверждать, что ещё за 20 веков до нашей эры в Египте стали формироваться элементы математической науки. Эти элементы ещё только начинали выделяться из практических задач и были целиком подчинены их содержанию. Техника вычислений ещё примитивна, методы решения задач не единообразны.

3. Древний Вавилон. Хронологический обзор. Вавилония – рабовладельческое государство Древнего Востока, существовавшее на территории современного Ирака по нижнему и среднему течению рек Тигра и Евфрата. Получило свое название от столицы – г. Вавилона.

Древнейшие поселения относятся к концу 5-го – началу 3-го тысячелетий до н.э. Население Вавилонии (шумеры), переходившее от рыболовства и охоты к земледелию и скотоводству, находилось на стадии разложения первобытнообщинного строя. Началась эксплуатация рабского труда. Стала выделяться рабовладельческая аристократия. Уже в это время появляется клинопись и шестидесятеричная система счисления.

В первой половине 3-го тысячелетия до н.э. в южной и средней части Двуречья возникли небольшие рабовладельческие города – государства. В средней части Двуречья в этот период начали оседать семитские племена, позднее называвшиеся аккадцами. В середине 24 в. до н.э. царь г. Аккада Саргон объединил в результате ряда войн все мелкие государства в могущественную рабовладельческую деспотию – Аккадское царство. В конце 23 в. до н.э. Аккадское царство пало под ударами горных племен – гутиев. В конце 22 в. до н.э. гутии были изгнаны; Шумер и Аккад объединились под властью третьей династии Ур. Было вновь создано централизованное бюрократическое государство, основанное на крупных царских и храмовых рабовладельческих хозяйствах. В конце 21 в. до н.э. Ур был захвачен и разорен племенами, вторгшимися с Востока и Запада. Царские земли были розданы мелкими частями в аренду и за службу чиновникам, ремесленникам и воинам. К этому времени шумерский язык в качестве разговорного был вытеснен аккадским языком.

В начале 2-го тысячелетия до н.э. особенно усилился Вавилон, лежавший на скрещении торговых путей. В 18 веке до н.э. в царствование Хаммурапи Вавилон подчинил своей власти большую часть Двуречья, включая Ассирию. Этот период характеризуется расцветом культуры, укреплением законодательства и правосудия, а также удивительным расцветом алгебры и геометрии. В этот же период велись наблюдения Венеры.

В конце 18 – начале 16 вв. до н.э. страной овладели восточные соседи – касситы, утвердившие в Вавилонии династию, которая правила до 12 в. до н.э. В этот период велись наблюдения восхода неподвижных звезд и первоначальные астрономические вычисления.

В конце 2-го и начале 1-го тысячелетий до н.э. в Вавилон вновь вторгаются соседние племена, а в 729 г. до н.э. ассирийский царь Тиглатпилесар III захватил Вавилон. С середины 8-го столетия вавилонские астрономы начали датировать наблюдения затмений и писать учебники по астрономии. Появляются придворные астрологи. В 7 в. до нашей эры ассирийский царь, Ашшурбанапал, укомплектовал свою знаменитую библиотеку, из которой, уже в новое время, археологи добыли первые таблички с клинописными текстами.

В конце 7 в. до н.э. Вавилония в результате восстания свергла Ассирийское иго. При этом в 612 г. до н.э. была разрушена столица Ассирийского государства Ниневия и все её многочисленные дворцы. В Вавилоне утвердилась власть Халдейской династии. Ново-Вавилонское царство достигло наибольшего расцвета при Навуходоносоре II. В 538 г. до н.э. Вавилония была завоевана персидским царем Киром, поддержанным торгово-жреческими слоями рабовладельцев. В течение 6–3 вв. до н.э. аккадский язык Вавилонии уступает место арамейскому языку. В 336 г. Вавилонию захватывает Александр Македонский. После его смерти в Вавилонии утверждается власть Селевкидов. Столицей становится Антиохия. Во втором веке до н.э. Вавилон, лежащий в руинах, – мертвый город. Но вавилонская математика и особенно астрономия продолжают развиваться.

4. Математика древнего Вавилона. В 1849 г. английский путешественник Лейярд, отыскивая памятники древности, стал раскапывать холм около небольшой деревни на левом берегу реки Тигр. Вскоре обнаружились развалины какого-то древнего города. Оказалось, что это все, что осталось от древней Ниневии и дворца Ашшурбанапала. Постепенно откопали весь дворец. В нём Лейярд нашел около 30 тысяч небольших глиняных табличек различной формы. Таблички были испещрены мелкими клинообразными знаками. Лейярд, не подозревая ценности находки, отправил таблички в Лондон, где они около 20 лет хранились не разобранными в Британском музее. Когда ученые научились читать клинописные тексты, оказалось, что это богатейшая библиотека: копии древнейших текстов.

В настоящее время археологами собрано около 500 тысяч табличек самых разных эпох, от начала 3-го тысячелетия до н.э. до 1 в. н.э. Из них примерно 150 с текстами математического содержания и 200 с числовыми таблицами. Все эти таблички относятся к двум основным периодам: периоду династии Хаммурапи (1800 – 1600 гг. до н.э.) и периоду Селевкидов (300 – 100 гг. до н.э.). Однако, различия в их содержании оказались не принципиальными.

Все расчеты в этих текстах ведутся в шестидесятеричной позиционной системе. В ней всего два основных элемента: «клин» $\triangledown$ с числовым значением 1 и «крючок» $\triangleleft$ с числовым значением 10. Повторением этих знаков по принципу аддитивности записывалось любое число от 1 до 59, например, 34 в клинописных текстах имело вид: $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangledown\ \triangledown\ \triangledown\ \triangledown$. Любое число большее 59 в этой системе записывалось в соответствии с позиционным принципом: $N=\alpha_0\cdot 60^0+\alpha_1\cdot 60^1+\ldots+\alpha_n\cdot 60^n$. Например, запись $\triangledown\triangledown\quad\triangleleft\triangledown\ \triangledown\ \triangledown$ $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangledown\ \triangledown\ \triangledown\ \triangledown$, которую историки математики записывают в виде 2,13,34, означала число $2*60^2+13*60^1+34$, равное 8014. В свою очередь, записанное в десятичной системе число 42764 в шестидесятеричной позиционной системе будет иметь вид 11,52,44, или

$\triangleleft\triangledown\quad\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangledown\ \triangledown\quad\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangledown\ \triangledown\ \triangledown\ \triangledown$.

С современной точки зрения большим неудобством вавилонской системы было отсутствие «позиционной пробки» т.е. символа, означающего отсутствие разряда. В нашей десятичной позиционной системе роль такой «позиционной пробки» выполняет символ нуля. Из-за отсутствия позиционной пробки в вавилонской системе один и тот же знак «клина» мог обозначать не только единицу, но любое число вида 60^K, где k – натуральное число. Более того, таким клином изображались и дроби со знаменателем, представляющим целую степень числа 60. Таким образом, приведенная выше клинописная запись 2,13,34, наряду с числом 8014, могла означать и число $2*60^1+13*60^0+34*60^{-1}= 133\frac{34}{60}$, и число $2*60^0+13*60^{-1}+34*60^{-2} = 2\frac{13}{60}\frac{34}{60^2}$, и т.д. В математике такие системы называют неабсолютными. В такой системе истинное значение числа определяется лишь исходя из условий задачи. Знакомство с клинописными текстами показывает, что Вавилонская математика не испытывала потребности в обозначении крайних нулевых разрядов. Но в обозначении промежуточных нулевых разрядов она должна была ощущать существенную нужду. Однако такой символ, образованный особой комбинацией двух «крючков», появился только в начале 3 века до н.э. в эпоху Селевкидов. Никаких его следов в эпоху Древневавилонского царства, к которой относится большинство известных нам математических текстов, не обнаруживается. В историко-математической литературе в шестидесятеричной записи дробная часть числа отделяется от его целой части точкой с запятой. Например, 12,7;6,18 означает число $12*60 + 7*60^0 + 6*60^{-1}+ 18*60^{-2}$, или в десятичной записи 727,105.

Сложным и до сих пор не решенным является вопрос о происхождении вавилонской системы счисления. Известный историк математики Морис Кантор (не путать с Георгом Кантором) в свое время пытался доказать, что в основе шестидесятеричной системы вавилонян лежало то, что Шумеры делили год на 360 дней. Другой историк, Г. Ковича, объяснял появление вавилонской системы счисления сочетанием двух систем с основаниями 10 и 6. О. Нейгебауер, так много сделавший для расшифровки вавилонских математических текстов, объяснял появление вавилонской системы слиянием денежных систем Шумеров и Аккадян. Анализируя вавилонские тексты, О. Нейгебауер пришел к выводу, что основной денежной единицей у Шумеров был шекель, а у Аккадян – мина. В торговых сделках основная денежная единица Аккадян мина приравнивалась, примерно, 60 шекелям – основной денежной единице Шумеров. О. Нейгебауер предположил, что с течением времени стало обычным делить целое на 60 частей, а любую шестидесятую долю целого называть шекелем. Каждая из этих гипотез имеет свои уязвимые места и не может быть принята в качестве окончательного решения проблемы. В чем нет сомнений, так это в том, что принятое у нас деление окружности на 360 градусов, деление градуса на 60 угловых минут, а минуты на 60 секунд, так же, как деление часа на 60 минут, а минуты на 60 секунд, пришло к нам из глубины веков от Шумеров.

Анализ клинописных математических текстов показывает, что на основе сложившейся в Вавилонии позиционной шестидесятеричной системы были созданы многие единообразные правила арифметических действий как с целыми числами, так и с дробями. Для облегчения действий существовали таблицы умножения (от произведения $1 \cdot 1$ до $60 \cdot 60$). Деление производилось по правилу $b : a = b \cdot \frac{1}{a}$ с помощью таблиц обратных значений. Фрагмент такой таблицы приведен в таблице 4 приложения.

Кроме указанных таблиц, вавилоняне использовали таблицу квадратов целых чисел, их кубов, обращённые таблицы (таблицы квадратных корней), таблицы чисел вида $n^3 + n^2$ и т.д.

В ряде вавилонских текстов содержится исчисление процентов за долги, пропорциональное деление.

Кроме того, вавилонянам было известно правило суммирования n членов арифметической прогрессии с данными первым и последним членами. В текстах, относящихся к эпохе Селевкидов, находятся задачи на суммирование n членов геометрической прогрессии, например, 1, 2, 2^2, 2^3, …,2^9, правда, способ решения из текста не совсем ясен. По-видимому, было обнаружено, что в такой прогрессии $S_n = (S_{n-1} + 1) + S_{n-1}$, что легко заметить при небольшом числе слагаемых.

Особенно замечательно правило суммирования ряда квадратов натуральных чисел, высказанное применительно к сумме $1^2+2^2+ \ldots +10^2$; в буквенном выражении его можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right)\sum_{k=1}^{n} k.$$

Был ли этот результат получен вавилонскими учеными самостоятельно – неизвестно. В эту эпоху ряд натуральных квадратов, правда в несколько иной форме, просуммировал Архимед, и его вывод был известен, во всяком случае, александрийским ученым.

Геометрические знания вавилонян, по-видимому, превышали египетские, так как в текстах, помимо общих типов задач, встречаются зачатки измерения углов и тригонометрических соотношений. В основном, впрочем, они тоже состояли из вычислений площадей и объёмов прямолинейных фигур, обычных для элементарной геометрии. Длину окружности вавилоняне вычисляли, утраивая диаметр; с таким же значением $\pi = 3$ определяли площадь круга. Однако эта площадь S выражалась ими не непосредственно через диаметр, а через длину окружности c, по правилу: $S = \frac{c^2}{12}$. Имелись также и способы приближенного вычисления объёмов, основанные на своеобразном усреднении размеров.

При сравнении геометрических знаний вавилонян и египтян необходимо иметь в виду, что в то время, когда вавилонянам были известны построения при помощи циркуля, а круговые орнаменты встречаются и в математических текстах, и в произведениях искусства, в Египте циркуль был неизвестен до эллинистической эпохи. Когда надо было нарисовать круг, египтянин сначала рисовал квадрат, а затем вписывал в него от руки круг.

Так называемая теорема Пифагора была известна не только для частных случаев, но и в полной общности. В одной из расшифрованных табличек содержится перечень прямоугольных треугольников с рациональными сторонами, то есть *троек* пифагоровых чисел $x, y, z,$ удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 = z^2$. Считается, что для нахождения таких троек чисел древневавилонские математики выбирали любых два целых положительных числа p и q, пользуясь которыми, находили: $x = p^2 - q^2$; $y = 2pq$; $z = p^2 + q^2$. Легко проверить, что полученные числа удовлетворяют условию $x^2 + y^2 = z^2$.

5. Алгебра древних вавилонян. В древневавилонских математических текстах много задач, которые с современной точки зрения сводятся к уравнениям 1-й, 2-й и даже 3-й степени. Приемы их решения эквивалентны современным методам решения следующих десяти видов уравнений и их систем:

а) Уравнения с одним неизвестным: $ax = b$; $x^2 = a$; $x^2 \pm ax = b$; $x^3 = a$; $x^2(x+1) = a$.

б) Системы уравнений с двумя неизвестными: $x \pm y = a,\ xy = b$; $x \pm y = a,\ x^2 + y^2 = b$.

Все эти уравнения записывались, хотя и без символов, но в своей особой терминологии и решались с помощью арифметикоалгебраических преобразований. Решение линейных и квадратных уравнений достигло высокого уровня уже в эпоху Хаммурапи; рассматривались также уравнения более высоких степеней.

В случае двух неизвестных одно называлось «длиной», другое – «шириной». Произведение неизвестных называли «площадью», «полем» или «длиной–шириной»; говорилось также о «сторонах моих квадратов». Во всех примерах «длина» больше «ширины». В задачах, приводящих к кубическому уравнению, встречалась третья неизвестная – «глубина», а произведение трёх неизвестных именовалось «объёмом». Приведённая терминология свидетельствует о происхождении ряда алгебраических задач из геометрии, но сами задачи имели совершенно отвлечённый характер. Это проявляется уже в том, что с неизвестными величинами, по названию имеющими различные измерения, обращались как с однородными. Например, «площадь» складывали со «стороной», от объема отнимали «площадь» и так далее. Следует отметить также, что в текстах, написанных на аккадском языке, «длина», «ширина», «площадь» и так далее изображались шумерским знаками. Поскольку разговорным был аккадский язык, а шумерский вышел из употребления, эти знаки приобретали характер настоящих математических символов. В некоторых случаях употреблялись и вовсе отвлечённые названия «множитель» и «обратное», обозначавшие собственно x и $1/x$.

Уравнения первой степени и их системы в клинописных текстах встречаются редко. Способы решения применялись различные: исключение неизвестных, введение вспомогательных неизвестных, правило ложного положения (в случае одного неизвестного) и другие.

Основные успехи были достигнуты вавилонянам в области решения задач на квадратные уравнения вида $x^2 \pm ax = b$ и системы, сводящиеся к виду $x \pm y = a,\ xy = b$ или $x \pm y = a,\ x^2 + y^2 = b$. Таких задач в клинописных текстах подавляющее большинство.

Рассматривая разработанные ими приемы, надо иметь в виду, что вавилоняне не знали ни отрицательных чисел, ни, тем более, комплексных и уравнения, не имеющие положительных корней, ими не рассматривались.

Уравнения $x^2 \pm ax = b$ всегда имеют один положительный корень (другой – отрицательный), и, с точки зрения древнего математика, это положение было самым естественным. Поскольку лишь уравнение $x^2 + q = px$ может иметь два положительных корня, оно в текстах не обнаружено. Вместо него использовалась эквивалентная ему система $x+y=a$, $xy=b$.

В качестве примера рассмотрим одну из задач, заимствованную из древневавилонского текста. Все числовые значения приведены в шестидесятеричной системе счисления.

«Я вычел из площади сторону моего квадрата, это 14,30 (в десятичной записи 870 – Р.М.)».

Далее идёт вычисление: «Ты берёшь 1, коэффициент. Ты делишь пополам 1, это 0;30 (в десятичной записи 0,5 – Р.М.). Ты умножаешь 0;30 на 0;30, это 0;15 (в десятичной записи 0,25 – Р.М.). Ты складываешь 0;30, которое умножал, с 29;30, получается 30, сторона квадрата».

В современных обозначениях означенная процедура соответствует решению уравнения $x^2-x=14{,}30$, и может быть выражена формулой:

$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}+\frac{p}{2}=\sqrt{(0;30)^2+14{,}30}+0;30.$$

Считается, что правило решения уравнения $x^2\pm ax=b$ было найдено дополнением левой части уравнения до полного квадрата. Если это так, то отсюда следует, что древневавилонский математик должен был знать правило: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

Что касается системы $x+y=a$, $xy=b$ то её, по мнению одних историков, с помощью тождества

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$ приводили к системе линейных уравнений

$$\frac{x+y}{2}=\frac{p}{2},\qquad \frac{x-y}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

По мнению других историков, такая система могла решаться с помощью подстановки: $x=\frac{a}{2}+z$, $y=\frac{a}{2}-z$, что дает $\left(\frac{a}{2}\right)^2-z^2=xy=b$, откуда $z=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$, после чего сразу находят x и y. Этот ход решения предполагает знакомство с тождеством $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Возникает вопрос, каким образом вавилоняне могли вывести тождества $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ и другие.

История об этом умалчивает. Может быть, при помощи чертежей, вроде тех, которые содержатся у Евклида и у арабов (см. рисунки 1 и 2). На эту мысль нас наталкивает геометрическая терминология, принятая в древневавилонской алгебре.

Однако нельзя позволить геометрическим терминам ввести нас в заблуждение. Вавилоняне мыслили, прежде всего, алгебраически. Хотя они изображали для наглядности неизвестные числа линиями

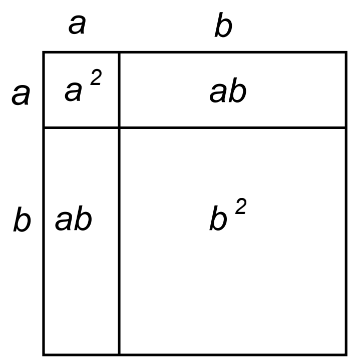

Рис. 1

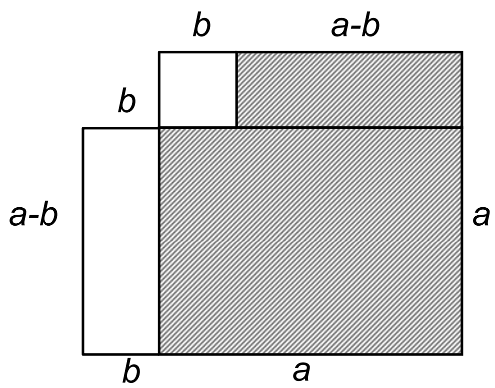

Рис. 2

и площадями, но последние всё же всегда оставались числами. Это можно видеть из рассмотренного нами примера, где от площади xy отнимается линейный отрезок x, что с геометрической точки зрения представляет бессмыслицу. Вавилоняне не боялись также перемножать друг с другом две площади, чего осторожный Евклид никогда не делал.

Учение о квадратных уравнениях явилось основой нового этапа в развитии математики, когда наряду с арифметикой и измерением фигур её полноправной частью стала алгебра. Для решения квадратных уравнений потребовалось многое, и сами они вызвали к жизни цепь новых понятий. Действительно, нужно было уметь производить разнообразные тождественные преобразования, оперировать неизвестными величинами как известными – словом, закладывать основы алгебраического исчисления. Со всем этим было связано также выделение канонических классов задач, решаемых с помощью соответствующих алгоритмов, и разработка приёмов, сводящих к этим классам другие задачи, по внешнему виду отличные от рассматривавшихся. В целом математическое мышление поднялось на новый, значительно более высокий уровень общности и отвлечённости и приобрело большую силу.

Внимание ряда исследователей привлекала высокая алгоритмичность, проявлявшаяся в математических текстах древнего Вавилона. Это давало повод к высказыванию предположений, что в те времена культивировались общие методы, отвлечённые от конкретных задач и представлявшие своеобразную алгебру. Однако существуют и более осторожные оценки математических достижений вавилонян.

Вавилонские математические традиции распространялись на сопредельные государства Ближнего Востока и могут быть прослежены в них вплоть до эпохи эллинизма (ок. 330 г. – ок. 30 г. до н.э.).

Приведённые примеры показывают, как в отдельных странах происходил процесс накапливания большого конкретного математического материала в виде приёмов арифметических действий, способов определения площадей и объёмов, методов решения некоторых классов задач, вспомогательных таблиц и т.п. Примерно такой же процесс накопления математических знаний происходил и в Китае, и в Индии.

Нет сомнений, что математические знания Индии и Китая имеют столь же богатую и самобытную историю. К сожалению, материал, на котором в древности вели свои записи ученые этих стран, и условия хранения подготовленных документов оказались неблагоприятными. До нас дошло только несколько документов, написанных в самом конце предшествующей эры. В Китае – это «Математика в девяти книгах» (2 век до н.э.), а в Индии – религиозные книги: сутры и веды (8 - 7 века до н.э.). Вся остальная математическая литература более позднего происхождения будет рассматриваться в соответствующих разделах курса.

Итак, к середине первого тысячелетия до н.э. в ряде стран Средиземноморского бассейна сложились условия, достаточные для того, чтобы математика могла быть осмыслена как самостоятельная наука. Её основные понятия и предложения были выделены как самостоятельный объект человеческой мысли, а форма этого выделения оказалась достаточно общей и абстрактной для введения логических доказательств. Эта следующая фаза развития математики с наибольшей силой определилась в античной Греции к 6-5 вв. до н.э.