

Лекция 3. Первые математические теории Древней Греции (6 век до н.э.)

План лекции:

1. Древняя Греция.
2. Системы счисления.
3. Системы дробей.
4. Возникновение первых математических теорий.
5. Школа ранних пифагорейцев.

1. Древняя Греция. В течение последних столетий второго тысячелетия до н.э. в бассейне Средиземного моря и в прилегающих к нему областях очень многое изменилось в экономике и в политике.

Бронзовый век сменился железным веком, и эта смена происходила в смутное время переселений и войн. С севера на Балканский полуостров вторглись греческие племена: ионийцы, ахейцы и эолийцы. Вытесняя жившие здесь племена и разрушая их культуру, ионийцы заняли Аттику – области на ю.-в. Средней Греции и с.-в. Пелопоннеса, ахейцы – большую часть Пелопоннеса, а эолийцы – Фессалию и Среднюю Грецию. В конце 12-11 вв. с Севера вторглись племена дорийцев, под давлением которых ионийцы и эолийцы переселились на острова и побережье Малой Азии, а впоследствии и в Южную Италию, образовав там так называемые греческие колонии.

Лишь немногие частности известны нам об этой революционной эпохе, но мы знаем, что к её завершению, примерно около 900 г. до н.э., уже не было царства Миноса и Хеттской державы, значительно слабее стали Египет и Вавилон и на исторической сцене появились новые народы. Наиболее выдающимися среди них были евреи, ассирийцы, финикийцы и греки. Вытеснение бронзы железом означало не только переворот в военном деле, но и ускорение роста экономики благодаря удешевлению средств производства, что, в свою очередь, сделало возможным более активное участие широких слоев общества в делах экономического и общественного значения. Это сказалось и в двух важных новшествах: в замене неудобного письма Древнего Востока легко доступным алфавитом и во введении чеканной монеты, что содействовало оживлению торговли. Наступило то время, когда культурные ценности уже не могли дальше оставаться исключительным достоянием восточного чиновничества.

Деятельность «морских разбойников», так египетские тексты характеризуют некоторые переселявшиеся народы, первоначально

сопровождалась немалыми культурными потерями. Критская цивилизация исчезла, египетское искусство пришло в упадок, наука Вавилона и Египта окостенела на столетия. Мы не имеем никаких математических текстов этого переходного периода. Когда положение снова стало устойчивым, Древний Восток оправился, оставаясь в основном верным традиции, было расчищено место для цивилизации нового склада – греческой цивилизации.

Те города, которые возникли на побережье Малой Азии и в самой Греции, уже не были административными центрами страны оросительного земледелия. Это были торговые города, где феодалы-землевладельцы старого уклада были обречены на поражение в борьбе, которую им довелось вести с независимым, обретшим политическое самосознание классом купцов. В течение седьмого и шестого столетий до н.э. это купечество взяло верх, но ему пришлось, в свою очередь, вступить в борьбу с мелкими торговцами и ремесленниками, с демосом.

Итогом был расцвет греческого полиса, самоуправляющегося города-государства – новое социальное явление, вполне отличное от ранних городов-государств Шумера и других стран Востока. Наиболее значительные из этих городов-государств сложились в Ионии, на анатолийском берегу современной Турции. Растущая торговля связала их со всем побережьем Средиземного моря, с Двуречьем, Египтом, со Скифией и даже более далекими странами. Долгое время ведущее место занимал Милет. Но и города на других берегах – Коринф, позже Афины в собственно Греции, Кротон и Гиарент в Италии, Сиракузы в Сицилии – становились богаче и значительнее.

2. Системы счисления. Из рассмотрения культур Древнего Египта и Вавилона мы видели, какое большое значение для развития математики имеет хорошая нумерация и удобные правила для основных арифметических действий. Именно благодаря великолепной шестидесятеричной письменной системе, в которой счёт с дробями был так же прост, как и счёт с целыми числами, вавилонские математики смогли решать системы линейных и квадратных уравнений с двумя и более неизвестными. Ничего подобного не могло быть у египтян с их запутанным счётом с дробями, когда каждое деление, каждое вычитание дробей представляло проблему.

В Древней Греции существовали две систем счисления. Одна – иероглифическая, другая – алфавитная.

Иероглифическая система несколько более древняя, чем алфавитная, возникла в Аттике и потом распространилась по всей

Греции. Поэтому историки называют её аттической. Древнейшая дошедшая до нас запись по аттической системе относится к VI в. до н.э.

Узловыми числами в этой системе служили символы:

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{I} & \Gamma & \Delta & \text{H} & \text{H} & \text{X} & \text{H} & \text{M} & \text{H} & \\ 1 & 5 & 10 & 50 & 100 & 500 & 1000 & 5000 & 10000 & 50000 \end{array}$$

образованные мультипликативной комбинацией начальных букв $\Gamma, \Delta, \text{H}, \text{X}, \text{M}$ греческих слов, обозначающих числа 5, 10, 100, 1000, 10000. Алгоритмические числа составлялись из узловых чисел по аддитивному принципу. Операции над числами в этой системе мало чем отличались от операций, принятых в Египте.

Новая *алфавитная система счисления* возникла в торговых греческих колониях ионийского побережья, и поэтому её называют ионийской. Древнейшая запись, сделанная в этой системе, относится к середине V в. до н.э. В этой системе все числа от 1 до 999 записывались с помощью 27 букв греческого алфавита. Их обозначение приведено в таблице 2 приложения. Для удобства они приведены также и непосредственно в тексте (таблица 1). Для того чтобы отличать числа от слов, над ними ставили либо черту, либо в конце штрих.

Таблица 1

$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\epsilon}$	$\bar{\zeta}^*$	$\bar{\eta}$	$\bar{\theta}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{\iota}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\omicron}$	$\bar{\pi}$	$\bar{\rho}^*$
10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\bar{\sigma}$	$\bar{\tau}$	$\bar{\upsilon}$	$\bar{\phi}$	$\bar{\chi}$	$\bar{\psi}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\alpha}^*$	
100	200	300	400	500	600	700	800	900

где: $\bar{\zeta}$ - вау, $\bar{\rho}$ - копа, $\bar{\alpha}$ - сампи

Запись числа в этой системе осуществлялась по аддитивному принципу, например, число 444 записывалось как $\bar{\nu}\bar{\mu}\bar{\delta}$.

Новая система счисления явилась важным шагом на пути создания современной универсальной нумерации. Она была хорошо приспособлена к оперированию с не очень большими числами и вполне отвечала хозяйственным запросам того времени. Уже простое сравнение записи числа 444 в старой аттической нумерации $\text{HHHH}\Delta\Delta\Delta\Pi\Pi$ и новой ионийской $\bar{\nu}\bar{\mu}\bar{\delta}$ свидетельствует о неоспоримом преимуществе новой системы.

Со временем необходимость записывать в этой системе числа больше тысячи привели к обозначениям, которые можно рассматривать как зачатки позиционной системы. Так, для обозначения тысячи стали применять ту же букву, что и для обозначения единицы, но снабжали её чёрточкой слева внизу, например, так как $\bar{\alpha} = 1$, то $\text{,}\bar{\alpha} = 1000$, так как $\beta = 2$, то $\text{,}\bar{\beta} = 2000$, ..., так как $\bar{\theta} = 9$, то $\text{,}\bar{\theta} = 9000$.

Число 10000 обозначали знаком $\overset{\alpha}{\text{M}}$, число 20000 – знаком $\overset{\beta}{\text{M}}$ и т.д. Иногда буква М заменялась точкой, которая ставилась позади соответствующей буквы. Например, число 43458 записывалось так: $\delta \cdot \text{,}\gamma \nu \nu \eta'$.

То, что алфавитная система явилась нумерацией нового, более высокого типа, доказывается всем ходом исторического развития. Возникнув в торговых греческих колониях малоазиатского побережья, она стала быстро распространяться в Аттике, вытесняя освещённую традицией и поддерживаемую властью систему. Она окончательно вытеснила аттическую нумерацию после того, как при Птолемеях Филадельфе (3 в. до н.э.) была принята в Александрии.

Обращаясь к арифметическим действиям над целыми числами в Древней Греции, необходимо отметить, что до нас не дошло ни одного античного сочинения, в котором они были бы предметом специального изучения или изложения. В нашем распоряжении находятся только отдельные отрывочные сведения, но уже они показывают, что греки были умелыми вычислителями. Можно предполагать, что схема сложения у греков была та же, что и у нас.

Умножение многозначных чисел выполняли с помощью распределительного закона. Так, например, при умножении 265 на 265 (смотри приведенную ниже таблицу) сначала каждое из чисел 200 (σ), 60 (ξ) и 5 (ε) умножали на 200 (σ). Получаемые произведения 40000 ($\overset{\delta}{\text{M}}$), 12000 ($\overset{\alpha}{\text{M}} \text{,}\beta$) и 1000 ($\text{,}\alpha'$) записывались в третьем ряду таблицы. Затем каждое из чисел 200 (σ), 60 (ξ) и 5 (ε) умножали на 60 (ξ) и полученные произведения 12000 ($\overset{\alpha}{\text{M}} \text{,}\beta$), 3600 ($\text{,}\gamma \chi$) и 300 (τ') записывали в четвертой строке таблицы. Наконец, каждое из чисел 200 (σ), 60 (ξ) и 5 (ε) умножали на 5 (ε) и полученные произведения 1000 ($\text{,}\alpha$), 300 (τ) и 25 ($\kappa \varepsilon'$) записывали в пятой строке таблицы. В заключение все полученные частные произведения складывали.

$\sigma \xi \varepsilon'$	2 6 5
$\sigma \xi \varepsilon'$	2 6 5
$\delta \alpha$	40000 12000 1000
$M M \beta \alpha'$	
α	12000 3600 300
$M \beta \gamma \chi \tau'$	
$\alpha \tau \kappa \varepsilon'$	1000 300 25
ζ	70225
$M \sigma \kappa \varepsilon'$	

Для выполнения такого умножения были необходимы специальные таблицы, содержащие произведения «однозначных» (в ионийской нумерации) чисел на «однозначные» множители. Очевидно, что эти таблицы должны были быть очень обширными. Ведь в них 1 должна фигурировать 37 раз, 2 – 36 раз и т.д. Этот способ умножения историки называют «греческим умножением».

Наряду с «греческим умножением» было в ходу «египетское умножение» при помощи последовательного удвоения и сложения, с которым мы уже познакомились, изучая математику Древнего Египта. Как производилось в Древней Греции деление нам неизвестно. Так как письменные вычисления были сложны, а папирус – дорог, то на практике охотнее прибегали к абаку, т.е. к счётной доске и счётным камням.

3. Системы дробей. В отличие от египтян и вавилонян, греки имели не одну, а целых три системы канонического представления дробей.

Первая из них – система аликвотных дробей – весьма схожа с той, которая существовала в Древнем Египте, и потому историки называют её египетской. В период с 540 по 450 гг. до н.э. она получила широкое распространение среди греческих купцов, ремесленников и художников.

Вторая – это система «обыкновенных дробей», в которой дроби не имели общепринятого письменного выражения. Наиболее совершенная из них, по существу, не отличалась от нашей системы, только числитель писали снизу, а знаменатель сверху. Дробной черты между числителем и знаменателем не ставили. Так, дробь

$\frac{5358}{10201}$ записывалась следующим образом $\frac{\alpha \cdot \beta \alpha'}{\varepsilon \tau \nu \eta}$. Производство

арифметических действий над этими дробями ни в одном из дошедших источников не описано специально. Однако, судя по ре-

зультатам, они не отличались от современных правил. Возникли обыкновенные дроби, скорее всего, в Греции в период с 450 до 250 гг. до н.э. «Египетские» и «обыкновенные» дроби применялись греками одновременно в одних и тех же задачах. В связи с этим ими были разработаны приёмы перевода дробей из одной системы в другую.

Третья, возникшая, как считают историки, в 3-2 вв. до н.э. в связи с развитием вычислительной астрономии, была построена на основе заимствованной у вавилонян системы шестидесятеричных дробей. В ней греческие математики заменили клинописные символы буквами своего алфавита в соответствии с принятой у них системой нумерации. Так, например, число $\overline{\lambda\zeta\delta'}\nu\varepsilon''$ в наших цифровых обозначениях имело бы вид: $37 + \frac{4}{60} + \frac{55}{3600}$. Система шестидесятеричных дробей представляет собой, несомненно, наиболее совершенную часть древнегреческой вычислительной техники, однако в общежитие она не вошла, а употреблялась только в научных сочинениях.

Таким образом, в смысле вычислительной техники греки имели хорошую базу для развития абстрактной математической теории.

4. Возникновение первых математических теорий. Отличительной особенностью развития математики в ранний период древнегреческой истории является формирование «чистой» математики с её доказательствами и логически связанной системой теорем.

То, что именно в Греции процесс объединения отдельных логических звеньев в стройную логическую цепь стал развиваться такими бурными темпами, объясняется, прежде всего, тем, что жизнь греческих государств в течение длительного времени характеризовалась ломкой общественных форм. В бурных столкновениях между общественными группами особую роль приобрели убеждение и доказательство, и это сказывалось не только в речах политических ораторов, но и в судебных процессах, и в философских спорах, и в научных произведениях.

К сожалению, у нас нет первоисточников, описывающих этот период развития греческой математики. Уцелевшие рукописи относятся к эпохе христианства и исламизма, и их только в малой мере дополняют заметки в египетских папирусах несколько более раннего периода. Всё же классическая филология позволила восстановить тексты, которые восходят к четвёртому столетию до н.э. и далее, и

мы благодаря этому располагаем надёжными изданиями Евклида, Архимеда, Аполлония и других великих математиков античности. Но в этих текстах перед нами уже вполне развитая математическая наука, и даже с помощью позднейших комментариев по ним трудно проследить ход исторического развития.

В результате о начальной стадии формирования греческой математики приходится судить, основываясь лишь на небольших фрагментах, приводимых в более поздних произведениях, и на отдельных замечаниях философов и других нематематических авторов. Очень много остроумия и труда было вложено в анализ текстов, благодаря чему удалось высветить немало тёмных мест в этом раннем периоде развития древнегреческой математики.

Важным источником наших знаний о математике рассматриваемого периода являются «Начала», написанные Евклидом в 4-ом веке до н.э., примерно через сто лет после Гиппократы Хиосского. По словам более поздних комментаторов, главы этого великого сочинения отражают творчество отдельных математиков и математических школ. Анализ, проведенный современными учеными, подтвердил это мнение. В дальнейшем мы периодически будем пользоваться этой особенностью «Начал», которые в определенном смысле представляют собой хрестоматию по истории математики двух предшествующих столетий.

Все эти источники и их анализ позволяют нам дать более или менее связную, хотя в значительной части предположительную, картину греческой математики в эпоху её формирования.

В новых общественных условиях, сложившихся в 8-6 вв. до н.э. в городах ионийского побережья, появился новый тип купца: купца-путешественника, жившего в период географических открытий, сравнимых только с открытиями шестнадцатого столетия. В упорной и жесткой борьбе добыл он для себя невиданную по тем временам независимость и не признавал ни абсолютного монарха, ни власти, предстающей в виде охранительного божества. Кроме того, благодаря своему богатству и труду рабов он имел свободное время и мог поразмыслить об окружающем его мире. Отсутствие вполне устоявшихся религий привело многих обитателей этих прибрежных городов к рационализму и научному подходу к изучаемым явлениям.

Неудивительно, что именно здесь, на ионийском побережье, в городе Милете, сложилась первая натурфилософская школа, представители которой пытались не только понять, но и объяснить устройство мира, не опираясь на догмы религии. Эта ионийская школа стала и первой математической школой Греции, в которой наряду с

вопросом «как» стал ставиться и современный научный вопрос «почему».

Основателем школы считается Фалес Милетский (ок. 624-547 гг. до н.э.) – первый из «семи мудрецов», которые, в сущности, были не учеными, а государственными деятелями, законодателями и моралистами. После ликвидации старой феодальной системы они заложили фундамент для новой политической организации греческих городов, которая была хотя и аристократической, но уже другого порядка. Однако мудрость Фалеса имела более общий, более философский характер. Он поставил вопрос о происхождении вещей. Насколько известно, он учил, что все произошло из воды. Фалес стоял в самой гуще кипучей ионийской жизни. Говорили, что он заработал много денег, ловко торгуя оливковым маслом; что заставил выкопать новое ложе реки для более удобной переправы войска Креза. Наконец, ему приписывают предсказание солнечного затмения 585 года до н.э.

Согласно Евдему (в передаче Прокла), Фалес занимался геометрией и решил две проблемы: дал способ определения расстояния от корабля до берега и способ вычисления высоты фигуры по длине её тени в тот момент, когда лучи солнца падали под углом в 45 градусов.

Вероятно, на основании этого сообщения Евдема, Прокл приписывает Фалесу ряд геометрических теорем, например, теорему о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника; теорему о равенстве треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам; теорему о равенстве вертикальных углов и о том, что диаметр делит круг пополам.

Вполне очевидно, что приписываемые Фалесу «открытия» нельзя понимать иначе, как в смысле открытия доказательств этих элементарных истин, которые сами по себе, как наглядно наблюдаемые факты, были, без сомнения, известны и до Фалеса.

Очевидно, стихийно возникавшие в Вавилонии, а может быть и в Древнем Египте, короткие цепочки логических умозаключений в новых исторических условиях стали основной тенденцией, планомерно и сознательно развиваемой системой. Этому, по-видимому, способствовало и то, что во времена Фалеса египетская и вавилонская математика давно уже стала мёртвым знанием. Выяснить, почему при решении той или иной задачи древние математики поступали определенным образом, можно было только при помощи логически связной системы рассуждений. Согласно Евдему, Фалес действительно, так и сделал, а его «азбучные истины», вроде тех, кото-

рые мы уже упоминали, как раз и относятся к самому началу такой логической системы. Каковы были эти доказательства, мы не знаем, но сама потребность в них указывает на научный характер первых познаний греков. Ниже, после знакомства с математикой ранних пифагорейцев, мы обратимся к анализу первой книги «Начал» Евклида, в которой можно обнаружить следы математической деятельности ионийцев и, прежде всего, самого Фалеса и его ученика Энопида Хиосского.

Ионийская школа натурфилософии прекратила своё существование после падения Милета, завоёванного в 495 году до н.э. персами.

5. Школа ранних пифагорейцев. Ко второй половине 6 века до н.э. относится образование нового научного центра в городах Южной Италии – Кротоне, Сибарисе, Таренте – в так называемой Великой Греции. Традиция связывает это с переездом около 530 г. Пифагора с острова Самоса в Кротон и с организацией им пифагорейского союза, который являлся замкнутой организацией, пытавшейся (но неудачно) выступить и на политической арене.

Как утверждают древние авторы, Пифагор много путешествовал по странам Востока. В Египте он попал в плен к персидскому завоевателю Камбизу, который увез его в Вавилон. Там он якобы целых семь лет изучал у магов теорию чисел, музыку и другие науки, а жрецы посвятили его в свои мистерии.

Вернувшись на родину, он выступил против победившей демократии и вынужден был покинуть Самос. Бежав в Кротон, он основал там братство верующих – пифагорейский орден, который позднее из Кротона распространился на другие греческие города Южной Италии и играл важную роль в политической жизни этих городов. Там Пифагор, проповедовавший бессмертие души, ввел для своих последователей строгие правила жизни. Посвященные в этот орден после испытательного периода и строгого отбора могли слушать из-за занавеса голос Учителя, но видеть его самого они могли только через несколько лет, когда их души были очищены строгой жизнью согласно обетам. Пифагорейцы считали, что эти очищения приближают душу к божеству и обеспечивают бессмертие.

Подобные учения встречались в то время у многих сект. Пифагорейцев отличал от них способ очищения души и соединения с божеством. В их секте это достигалось при помощи математики. Математика была одной из составных частей их религии. Бог, учили они, положил числа в основу мирового порядка. Бог – это единство,

а мир – множество, состоящее из противоположностей. Гармония приводит их к единству и соединяет в космос. Гармония божественна и выражается в числовых отношениях. Кто до конца изучит эту божественную числовую гармонию, – учил Пифагор – тот сам станет божественным и бессмертным. *Музыка, гармония и числа* в учении пифагорейцев неразрывно связаны друг с другом. В своих проповедях Пифагор смешивал учения о богах и звездах, музыкальной гамме, священных числах и геометрических построениях, выдавая всю эту мешанину в качестве божественной мудрости.

По свидетельству Филолая, Платона, Аристотеля, учение пифагорейцев о числе как основе мира складывалось из высказываний, вроде следующих: «Вещи – подражания числам»; «Число – это закон и связь мира, сила, царящая над богами и смертными, условие всего определяемого, всего познаваемого»; «Сущность вещей и их природа есть число, вносящее в разнообразие единство и обуславливающее гармонию» и т.д.

Наряду с этим в учении пифагорейцев о числе была и положительная сторона: это учение являлось одной из первых попыток выяснить роль и значение количественной стороны явлений природы. Именно в этой школе возникли впервые и теоретическая арифметика, и теоретическая геометрия. Имена математиков того периода, входящих в пифагорейский союз, неизвестны, по традиции, все открытия, сделанные в этой школе, приписывались самому Пифагору. Одна из легенд утверждает, что все накопленные в этой школе математические знания были собраны в одном труде, который, якобы, назывался «Предания Пифагора».

Согласно комментаторам для пифагорейцев имело первостепенное значение то, что важнейшие гармонические интервалы могут быть получены при помощи отношений чисел 1, 2, 3 и 4. Сами эти числа составляли знаменитую «тетраду». Очень древнее изречение гласит: «Что есть оракул дельфийский? Тетрада! Ибо она есть музыкальная гамма сирен».

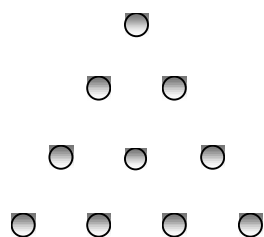


Рис. 3

Геометрически тетрада изображалась «совершенным треугольником» (рис. 3), арифметически – «треугольным числом» $1+2+3+4=10$. По преданию, пифагорейцы клялись «тем, кто вложил в нашу душу тетраду, – источник и корень вечной природы». Четное и нечетное, с точки зрения пифагорейцев, были началом всех вещей.

У пифагорейцев считалось чем-то в высшей степени замечательным, если число равнялось сумме своих собственных делителей. Они, как и мы теперь, называли такие числа «совершенными». Такой же достопримечательностью представлялись им и пары так называемых «дружественных» чисел, каждое из которых равнялось сумме делителей другого, например, числа 220 и 284. Когда Пифагора однажды спросили, что такое «друг», он сказал, что это «второе я», и упомянул о дружественных числах 284 и 220. Такие загадки со взаимным подменом чисел знали также в Вавилоне.

Почти все авторы приписывают ранним пифагорейцам учение о четных и нечетных числах. Считается, что это учение впоследствии, как дань традиции, было включено Евклидом в IX книгу «Начал» начиная с 21-го по 36-е предложения. Эта часть и по стилю, и по содержанию резко отличается от остального содержания этой книги. По мнению историков, она представляет собой архаический и типично пифагорейский математический отрывок, относящийся к концу 6-го или, в крайнем случае, к началу 5-го века до нашей эры. В сокращенной формулировке эти предложения гласят следующее: сумма чётных чисел является чётной; сумма чётного количества нечётных чисел будет чётна; сумма нечётного количества нечётных чисел будет нечётной и так далее. В последнем, тридцать шестом, предложении доказывается, что числа вида $2^n(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)$ являются совершенными, если только число $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$ является простым.

Ранним пифагорейцам приписывается учение о фигурных числах. Предполагается, что они ввели понятия о числах треугольных, квадратных, пятиугольных, шестиугольных и т.д., связывая их с геометрическими фигурами, построенными из точек (рис.4). Треугольными они называли числа 1, 3, 6, 10, 15, 21, представляющие собой

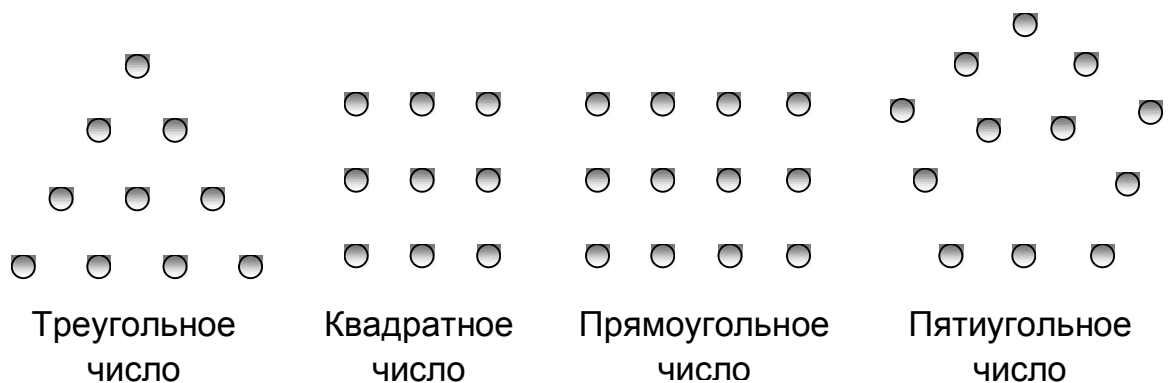


Рис. 4

частичные суммы ряда, составленного из арифметической прогрессии 1, 2, 3, 4, 5, 6. Квадратными – числа 1, 4, 9, 16, 25, 36, представляющие собой частичные суммы ряда, составленного из арифметической прогрессии 1, 3, 5, 7, 9, 11. Пятиугольными – числа 1, 5, 12, 22, 35, 51, представляющие собой частичные суммы ряда, составленного из арифметической прогрессии 1, 4, 7, 10, 13, 16. Было у пифагорейцев и понятие прямоугольного числа $n(n+1)$.

О геометрических познаниях пифагорейцев 6-го века тоже мало что известно. Приоткрыть завесу над этим вопросом помогает анализ «Начал» Евклида. Внимательное чтение первой книги «Начал» показывает, что в ней употребляются два различных понятия о равенстве: в первой половине (приблизительно до теории параллельных прямых) равными называются фигуры, которые при наложении совмещаются, а во второй половине – фигуры, имеющие одинаковую площадь. Чувствуется, что в первой книге мы имеем механическое соединение результатов, полученных двумя различными школами. Какие это были школы, можно судить по написанному Проклом комментарием к этой книге: все исторические ссылки для первой половины ведут к ионийцам, а для второй – к пифагорейцам.

Кроме первой половины первой книги «Начал», плодом деятельности ионийской школы является и посвященная окружностям третья книга, содержащая теорему Фалеса о прямом угле в полуокружности. Характер применяемых там построений показывает, что в противоположность пифагорейцам ионийская школа большое значение придавала построениям с окружностью. Что касается пифагорейской школы, плоды деятельности которой мы имеем помимо первой книги, также во второй и в четвертой книгах «Начал», то для неё характерным является именно представление о фигурах как о некоторых величинах, составленных из точек, как числа из единиц.

Если при исследовании ионийской геометрии мы можем думать об определенной связи с Вавилонией, где построения при помощи циркуля и круговые орнаменты встречаются и в математических текстах, и в произведениях искусства, то для пифагорейцев гораздо более вероятными являются связи с Египтом, по крайней мере, на первых стадиях развития. Полагают, что отсутствие упоминания об окружности в пифагорейской геометрии связано с тем, что в Египте циркуль был неизвестен до эллинистической эпохи.

Если учесть, что на протяжении многих столетий вавилонские художники и жрецы, пользуясь циркулем и линейкой, рисовали орнаменты и различные кабалистические символы и фигуры, то естественно предположить, что позже, уже в ионийской школе, решение

задач на построение стало важным и интересным занятием. Можно также предположить, что именно здесь возникла традиция выполнять построения с помощью циркуля и линейки.

Судя по высказываниям более поздних и не очень надежных авторов, пифагорейцам того периода были известны некоторые свойства правильных многоугольников и правильных многогранников, а также то, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам. Считается, что они показали, как заполнить плоскость системой правильных треугольников, или квадратов, или правильных шестиугольников, а пространство – системой кубов.

Каталог Прокла – документ, в котором Прокл перечислил все математические открытия, сделанные пифагорейцами, – приписывает Пифагору, помимо многого другого, еще и построение правильных многогранников. Однако детальное изучение документов, относящихся к этому вопросу, показывает, что Пифагор мог быть знаком лишь с кубом, тетраэдром и додекаэдром. Октаэдр же и икосаэдр, вероятнее всего, были открыты только в пятом веке до н.э. гениальным математиком античности Теэтетом.

Судя по более поздним работам, пифагорейцы рано овладели техникой преобразования многоугольников сначала в прямоугольник, а затем и в квадрат. Впоследствии эту процедуру стали называть квадрированием. Преобразование n -угольника в треугольник выполнялось шагами. На каждом шаге число вершин уменьшалось на единицу.

На приведенном чертеже (рис.5) для простоты взят пятиугольник. Для «усечения», например, вершины B через неё проводилась

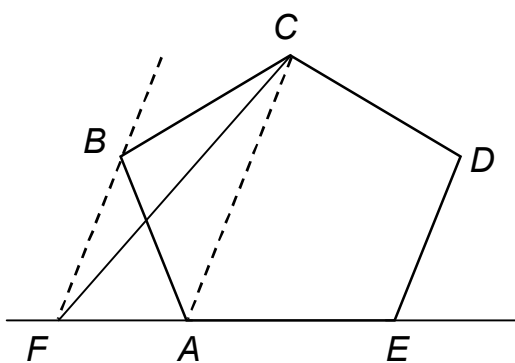


Рис. 5

прямая, параллельная диагонали AC , до пересечения в точке F с продолжением стороны AE . Соединив эту точку с вершиной C , получим треугольник AFC , который, как легко видеть, равновелик треугольнику ABC . Заменяв треугольник ABC треугольником AFC , получим четырехугольник $FCDE$, равновеликий исходному пятиугольнику. Если аналогичную

процедуру проделать и с вершиной D , то получим нужный нам треугольник.

Преобразование построенного треугольника в прямоугольник очевидно. Значительно труднее полученный прямоугольник преоб-

разовать в равновеликий квадрат. Для этого древнегреческие геометры использовали теорему Пифагора.

Её открытие пифагорейцы приписывали самому Пифагору. Однако, как мы уже отмечали, эта теорема была известна в Вавилоне времен Хаммурапи. Поэтому весьма вероятно, что речь должна идти не об открытии, а о доказательстве этой теоремы. Один из возможных вариантов такого доказательства приведен в первой книге

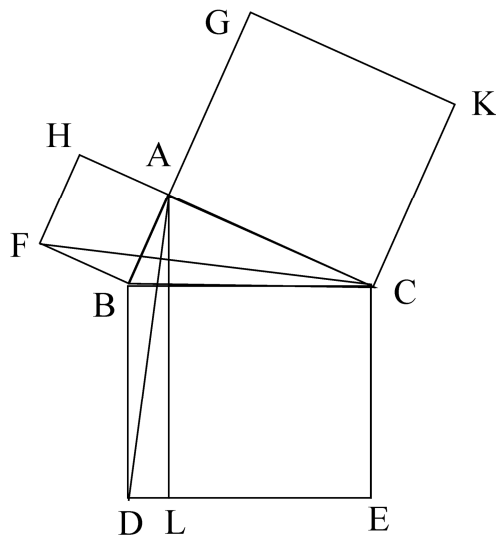


Рис. 6

«Начал» Евклида. Мы здесь рассмотрим только чертеж (рис.6) и краткие пояснения. Прежде всего, приведем геометрическую формулировку теоремы Пифагора: «В прямоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей прямой угол, равен вместе взятым квадратам на сторонах, заключающих прямой угол».

Таким образом, судя по чертежу, надо доказать, что квадрат [BE] равновелик взятым вместе квадратам [BH] и [AK] (здесь и в дальнейшем

прямоугольники будем обозначать указанием противоположных вершин). Для доказательства достаточно заметить, что прямоугольник [BL] в два раза больше треугольника BAD, а квадрат [FA] в два раза больше треугольника BFC. Рассматриваемые треугольники равны, в чем легко убедиться, поворачивая треугольник BFC вокруг точки B на 90° . Из равенства треугольников следует равновеликость прямоугольника [BL] и квадрату [FA]. Аналогично доказывается, что прямоугольник [LC] равновелик квадрату [AK]. Отсюда следует, что объединение прямоугольников [BL] и [LC], то есть квадрат [BT], равновелико вместе взятым квадратам [FA] и [AK], что и доказывает теорему.

Если верить Проклу, что доказательство теоремы Пифагора, приведенное в первой книге «Начал» Евклида, принадлежало ранним пифагорейцам, то естественно также предположить, что им была известна процедура преобразования прямоугольника в равновеликий квадрат. Если это так, то, скорее всего, последовательность действий была такой: сначала прямоугольник преобразовывали в гномон – шестиугольник CBJHGL, изображенный на рисунке 7. Та-

кой фигурой широко пользовались древнегреческие математики. Потом этот гномон представляли разностью двух квадратов, которую, в свою очередь, с помощью теоремы Пифагора преобразовывали в искомый квадрат.

То, что последовательность преобразований была именно такой, в какой-то мере подтверждает широко используемый пифагорейцами чертеж (рис. 7).

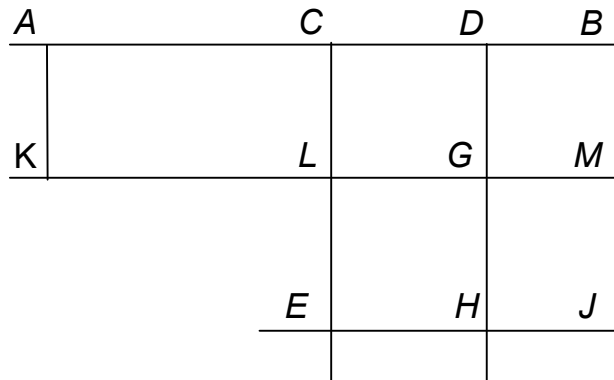


Рис. 7

Пусть, например, прямоугольник [AG] надо было преобразовать в квадрат. Для этого на продолжении прямой AD откладывали отрезок DB, равный стороне данного прямоугольника DG. Затем образовавшийся отрезок AB точкой C делили на два равных отрезка AC и CB. На отрезке CB строили квадрат [CJ] и продолжение линий DG и KG. Из построения следует, что прямоугольник

[AL] равен прямоугольнику [DJ].

Теперь легко видеть, что данный прямоугольник [AG] равновелик гномону CBJHGL, так как оба они составлены из равных прямоугольников [AL] и [DJ], к которым прибавлен прямоугольник [CG]. В свою очередь, гномон CBJHGL равен разности квадратов [CJ] и [LH].

Затем, уже на другом чертеже, строили прямоугольный треугольник с катетом, равным стороне меньшего квадрата, то есть отрезку CD, и гипотенузой, равной стороне большего квадрата, то есть отрезку CB. В соответствии с теоремой Пифагора, квадрат, построенный на втором катете, был равновелик рассматриваемой разности квадратов, то есть искомому квадрату.

По-видимому, именно из решения задач на квадрирование плоских фигур сформировалась задача о квадратуре круга. Впоследствии с развитием стереометрии была поставлена задача о преобразовании прямоугольного параллелепипеда в равновеликий куб. Задачу следовало решить с помощью циркуля и линейки: имея три отрезка – ребра параллелепипеда, построить отрезок – ребро искомого куба. Решить эту задачу не удавалось; она обрастала легендами, превратившись в задачу об удвоении куба. В этот же период, а возможно и раньше, появилась задача о трисекции угла. Успешно спра-

вившись с делением отрезка на любое количество равных отрезков, античные математики должны были неожиданно столкнуться с непреодолимыми трудностями при делении угла. Можно только гадать, сколько времени, сил, и фантазии они потратили на то, чтобы, пользуясь циркулем и линейкой, разделить произвольный угол на три равные части.

Таким образом, учение Пифагора имело две стороны: оно было и научным, и религиозно-мистическим. Эта двойственность, многие годы осложнявшая взаимоотношения между членами союза, после смерти Пифагора привела его учеников к серьёзному конфликту. В соответствии с преданием, один из учеников Пифагора, некий Гиппас, осмелился добавить к учению Пифагора некоторые новинки и поделиться этим с другими. Он дал построение шара, описанного вокруг додекаэдра; подробно разработал учение о гармонической средней; развил учение о музыкальных отношениях. Эти и им подобные нарушения тайны привели к разрыву со школой. Гиппас был изгнан. Позднее, когда он погиб во время кораблекрушения, его противники утверждали, что это было наказанием за совершенное им осквернение святыни. Его последователи называли себя «математиками» в противоположность «акусматикам», которые строго держались священных пифагорейских правил жизни и благоговейно передавали друг другу «Akusmata» – священные изречения своего учителя.