

Лекция 5. От Архита до Евклида (4 век до н.э.)

План лекции:

1. Академия Платона.
2. Архит: удвоение куба, арифметика.
3. Теэтет. Классификация иррациональностей.
4. Учение Теэтета о правильных многогранниках.
5. Евдокс. Теория подобия.
6. Метод исчерпывания Евдокса.
7. Менехм и его конические сечения.

1. Академия Платона. Промежуток времени, который мы теперь будем рассматривать, начинается с кончины Сократа, отравленного цикутой (399 до н.э.), и кончается, когда Александр Великий распространил семена эллинской культуры по всему миру (333 г. до н.э.).

В политическом отношении это время было периодом упадка, но для философии и точных наук, напротив, временем ещё невиданного расцвета. В центре научной жизни стояла фигура Платона (429 – 348 гг. до н.э.). Он руководил и воодушевлял научную работу как внутри, так и вне своей академии. Великие математики – Теэтет и Евдокс и все другие, перечисленные в Каталоге Прокла, – были друзьями Платона, его учителями в области математики и его учениками в области философии. Его великий ученик Аристотель (384-322), учитель Александра Великого (356-323), провёл двадцать лет жизни в чудной атмосфере Академии.

К этому периоду относится деятельность Архита (ок. 428 – 365 до н.э.), Теэтета (ок. 420 – 369 до н.э.), Евдокса (ок. 406 – ок. 355 до н.э.), а также Менехма и его брата Динострата.

2. Архит: удвоение куба, арифметика. Многосторонность этого замечательного южно-итальянского дорийца является беспримерной даже для того времени. Он решил знаменитую делийскую задачу об удвоении куба при помощи необыкновенно остроумного стереометрического построения. Архит не только вывел несколько вспомогательных предложений относительно пропорциональности чисел и несколько неравенств, касающихся трёх средних, но вся 8-я книга "Начал" с её арифметической теорией непрерывных пропорций, подобных чисел и т.д. в основном является его произведением. Значительный вклад внес он и в теорию несоизмеримых величин. Птолемей с полным правом называет его крупнейшим пифагорей-

ским теоретиком музыки. Размышлял Архит и о физической природе звука и был первым, кто дал систематическую разработку механики на математических основаниях. Он был очень дружен с Платоном, которого посвятил в тайны точных наук и философию пифагорейцев. В своём родном городе Таренте Архит пользовался большим уважением как государственный деятель: семь лет подряд он выбирался стратегом, хотя по закону это разрешалось только на один год, и он не проиграл ни одного сражения. После того как близкие ему по духу аристократические пифагорейцы были изгнаны из Италии, он, сохраняя внешние формы демократии, сумел удержать полуаристократический режим.

Знакомясь более подробно с математическим творчеством Архита, рассмотрим, прежде всего, его стереометрическое решение делийской задачи. Сконструировав сложную геометрическую фигуру, представляющую пересечение трех особым образом расположенных поверхностей – конуса, цилиндра и тора, он сумел построить отрезки x и y , образующие непрерывную пропорцию $a : x = x : y = y : b$, первый из которых и давал решение задачи. Ван дер Варден, рассмотревший это удивительное решение, написал: "Разве это не замечательно? Архита, должно быть, осенило некое божественное вдохновение, когда он нашел это построение".

Познакомимся теперь с этим решением, разбив его на шаги.

На первом шаге Архит на круге диаметром $AD = b$ строит прямой круговой цилиндр (на рисунке 14 изображена только плоскость, в которой лежит основание рассматриваемого цилиндра, и некоторое время вы должны будете мысленно выполнять описываемые действия). Затем на диаметре AD он строит полукруг, перпендикулярный плоскости основания цилиндра. Наконец, этот полукруг Архит мысленно поворачивает на 90 градусов против часовой стрелки вокруг образующей цилиндра AA' .

В этом процессе точка M пересечения движущейся полуокружности с боковой поверхностью цилиндра, вычертит на этой поверхности непрерывную кривую, которая, начинаясь в точке D , сначала поднимается на высоту, равную радиусу основания, а потом опускается до точки A , когда вращающийся полукруг полностью выйдет за пределы цилиндра.

На втором шаге в круге, являющемся основанием построенного цилиндра, Архит проводит хорду $AB = a$ и продолжает её до пересечения в точке H с касательной DH (рис. 14).

Получившийся треугольник ADH Архит вращает вокруг прямой AD . Точка пересечения прямой AH с боковой поверхностью цилиндра вычертит на этой поверхности кривую, которая, начинаясь в точке B , будет подниматься, пока DH не совпадёт с образующей DD' .

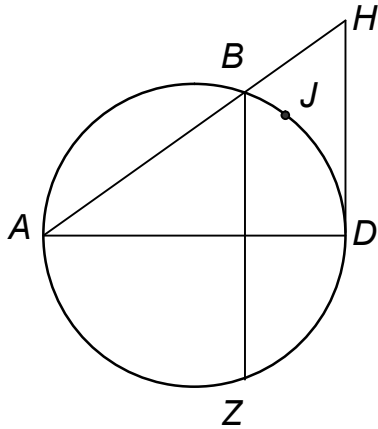


Рис.14

Обе кривые на боковой поверхности цилиндра пересекутся в некоторой точке K . Точку пересечения образующей цилиндра, проходящей через точку K , с основанием цилиндра обозначим J .

В процессе вращения прямоугольного треугольника ADH точка B опишет полуокруг, перпендикулярный плоскости основания. Диаметр BZ этого полуокруга будет перпендикулярен AD .

На третьем шаге Архит из всех положений вращающегося вокруг AA' полуокруга фиксирует то, при котором основание этого полуокруга проходит через точку J .

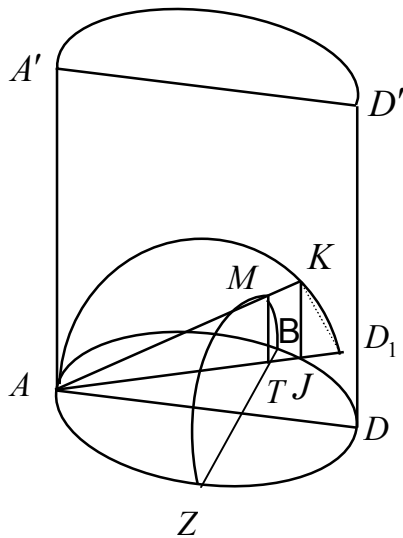


Рис. 15

Теперь полученную пространственную фигуру изобразим на рисунке 15.

Так как полуокруг на BZ и полуокруг на AD_1 перпендикулярны основанию цилиндра, то линия пересечения – отрезок MT – будет перпендикулярен плоскости основания, а следовательно, и прямой BZ . Но тогда $MT^2 = ZT \cdot TB$, т.к. MT полухорда, перпендикулярная диаметру. С другой стороны, $ZT \cdot TB = AT \cdot TJ$ по свойству хорд, пересекающихся в точке T внутри круга. Следовательно, $MT^2 = AT \cdot TJ$, откуда следует, что угол AMJ – прямой и, следовательно, $MJ_1 \parallel KD_1$.

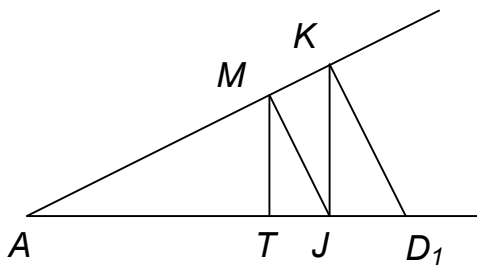


Рис. 16

На четвёртом шаге Архит рассматривает треугольник AKD_1 (рис.16), вынесенный нами для наглядности из рисунка 15.

Так как $\triangle AMJ \sim \triangle AJK \sim \triangle AKD_1$, то $AM : AJ = AJ : AK = AK : AD_1$.

Но $AM = AB = a$, $AD_1 = AD = b$. Если обозначить $AJ = x$ и $AK = y$, то $a : x = x : y = y : b$ и, следовательно, $x^3 = a^2 b$.

При $b = 2a$ получим $x^3 = 2a^3$, т.е. куб с ребром $x = AJ$ в два раза больше куба с ребром a .

Несмотря на оригинальность и красоту выполненного Архитом построения, античные математики не признали его в качестве решения рассматриваемой задачи, так как он для нахождения искомого отрезка использовал средства, отличные от циркуля и линейки.

Поиски "настоящего" (с помощью циркуля и линейки) решения продолжались, и Архит в этих поисках принимал активное участие. Об этом свидетельствуют его исследования в области непрерывных пропорций, хотя, надо признать, был и еще один мотив таких исследований – теория музыки, в которой непрерывные пропорции играют важную роль.

Разработанная им теория содержится в 8-й книге «Начал» Евклида. Исходным пунктом систематического развития всего содержания книги является второе предложение восьмой книги «Начал»: найти любое заданное количество чисел, последовательно пропорциональных и наименьших в заданном отношении. Если данное отношение в наименьших числах будет $a : b$, то три последовательных числа a^2 , ab , b^2 образуют непрерывную пропорцию $a^2 : ab = ab : b^2$. Если числа a^2 , ab , b^2 помножить на a , а последнее ещё и на b , то получатся четыре числа a^3 , a^2b , ab^2 , b^3 , которые вновь образуют непрерывную пропорцию. Таким же образом можно найти любое заданное число членов, крайние из которых всегда будут некоторыми степенями a и b .

Центральная задача 8-й книги такова: при каком условии между двумя числами a и b возможно вставить одно или несколько чисел в непрерывной пропорции? Эта задача решается предложениями 9 и 10: если a и b – взаимно простые числа, то между ними можно вставить столько же находящихся в непрерывной пропорции чисел, сколько их существует между единицей и каждой из них, и обратно. Таким образом, a и b являются конечными членами двух геометрических рядов с одинаковым числом членов: если

$$1, p, p^2, \dots, p^n = a \text{ и } 1, q, q^2, \dots, q^n = b, \text{ то } a = p^n, p^{n-1}q, p^{n-2}q^2, \dots, q^n = b$$

3. Теэтет. Классификация иррациональностей. Год рождения Теэтета точно неизвестен. Ориентировочно считают, что родился он в промежутке от 420 до 416 гг. до н.э. Со слов Платона известно, что

был он самым талантливым учеником Феодора. В 399 году, выслушав доклад своего седовласого учителя о доказанных им иррациональностях, совсем еще юный Теэтет заинтересовался этой проблемой. Размышляя над ней, он, как утверждает Платон, дал классификацию всех отрезков, производящих рациональные квадраты, и выяснил, какие из них соизмеримы, а какие нет. Беседуя о нём с Сократом (469 - 399), Феодор говорит: "Из всех молодых людей, с которыми мне когда-либо приходилось встречаться (а их довольно много бывало у меня), я не знал ни одного такой удивительной одарённости. Легко воспринимает учение, как редко кто другой, при этом необыкновенной мягкости характера и вместе с тем мужествен, как никто.... Этот юноша, - говорит далее Феодор, - так легко и без всяких запинок успевает в науке и так уверенно и успешно ведет исследование, будто это масло струится бесшумным потоком, и невольно удивляешься, как возможно так много совершить в таком юном возрасте". Дата смерти Теэтета нам известна. В 369 году в битве под Коринфом он был смертельно ранен, и его умирающего, как героя, привезли в Афины.

Со слов Платона и других более поздних авторов мы знаем, что Теэтет сумел общим образом охарактеризовать первый бесконечный класс иррациональностей, а именно таких, которые мы теперь обозначаем $\sqrt{N}$, где N – целое число, не являющееся полным квадратом. Ему принадлежит, по-видимому, следующая замечательная теорема: если площадь квадрата выражается целым неквадратным числом, то его сторона несоизмерима со стороной единичного квадрата.

Теэтету приписывается также открытие двух правильных многогранников: октаэдра и икосаэдра. Кроме того, он показал, как, имея отрезок, равный радиусу некоторой сферы, построить каждый из пяти правильных многогранников, которые в античной Греции называли платоновскими телами.

Считается, что именно ему принадлежит основное содержание десятой и тринадцатой книг "Начал" Евклида. Некоторые вопросы из этих книг будут рассмотрены ниже.

Классификация иррациональностей. Как мы отмечали в предыдущей лекции, к началу четвертого века до нашей эры, помимо несоизмеримости единичного отрезка с диагональю построенного на нем квадрата, то есть со стороной квадрата площадью 2, Феодором была доказана несоизмеримость единичного отрезка со сторонами квадратов с площадями 3, 5, ..., 17. Нерешённой оставалась

общая проблема: стороны каких квадратов, содержащих целое число единичных квадратов, соизмеримы с единичным отрезком?

Ответ на этот вопрос, а также первую классификацию иррациональностей дал Теэтет. Для этого он, прежде всего, ввел точные понятия о "соизмеримом по длине" и "соизмеримом в квадрате". В частности, отрезки (или площади), имеющие общую меру с фиксированным единичным отрезком (единичным квадратом), он называет *измеримыми*. Соизмеримые площади называются у него *выразимыми*. С другой стороны, *выразимыми отрезками* он называет все те отрезки, которые производят соизмеримые квадраты, то есть не только все соизмеримые отрезки, но также и несоизмеримые, вроде исследованных Феодором сторон квадратов с площадями 3, 5, ..., 17. В этой терминологии уже видно первое применение принципа, на основании которого линейные отрезки классифицируются по производимым ими квадратам. Все остальные отрезки Теэтет называет невыразимыми.

В предложении 9-й десятой книги "Начал" (9, X) Евклид, в соответствии с разработанной Теэтетом теорией, формулирует необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять два квадрата для того, чтобы их стороны были соизмеримы по длине: "Квадраты на двух соизмеримых по длине отрезках относятся как одно квадратное число к другому квадратному числу. И квадраты, относящиеся как одно квадратное число к другому квадратному числу, имеют также соизмеримые по длине стороны". К этому признаку приводят самые элементарные рассуждения: если стороны квадратов соизмеримы, то у них есть общая мера. Пусть в стороне первого квадрата она укладывается p раз, а в стороне второго – q раз. Разделим каждую из смежных сторон первого квадрата на p равных частей, а второго – на q равных частей и проведем через точки деления прямые, параллельные сторонам соответствующих квадратов. В результате первый квадрат распадется на p^2 , а второй – на q^2 одинаковых квадратов, соответствующих общей мере сторон. В результате получим, что площади квадратов относятся первый ко второму как $p^2 : q^2$, то есть как квадратные числа. Аналогичные рассуждения приводят и к обратному утверждению.

В 10-й книге "Начал" это предложение доказывается арифметически, со ссылками на (5, X), (20, VI) и (11, VIII). На основании этого предложения Теэтет смог ответить на вопрос, какие из отрезков будут соизмеримы с единицей длины, и тем самым дать общее реше-

ние задачи, которая была решена Феодором только для сторон квадратов с площадями от 3 до 17. А именно, что сторона квадрата, площадь которого выражается целым, но не квадратным числом, не имеет общей меры с единичным отрезком.

Позже Теэтет из множества невыразимых отрезков выделяет три основных рода иррациональных отрезков: медиаль ("средняя") $\sqrt{\sqrt{M} \cdot \sqrt{N}}$, биномиаль ("двухименная") $\sqrt{N} + \sqrt{M}$ или $N + \sqrt{M}$ и апотому ("отсеченная") $\sqrt{N} - \sqrt{M}$, или $N - \sqrt{M}$, или $\sqrt{N} - M$.

В десятой книге Евклид (Теэтет) доказывает, что эти новые виды отрезков "невыразимы", то есть построенные на них квадраты несоизмеримы, а также, что они взаимно исключают друг друга. Все эти доказательства используют одну и ту же идею: чтобы показать свойства каких-либо отрезков, надо построить на этих отрезках квадраты и исследовать их свойства. Например, для того чтобы показать, что биномиаль не может быть медиалью, Теэтет доказывает, что квадрат на биномиали не может быть медиальной площадью, и так далее.

4. Учение Теэтета о правильных многогранниках. Учение Теэтета о правильных многогранниках изложено в 13-й книге "Начал". В ней Теэтет, как и в 10-й книге, пользуется преимущественно методами геометрической алгебры; пропорции в обеих книгах встречаются очень редко. В обеих книгах геометрические построения искусно переплетены с алгебраическими рассуждениями. Автор ничего не сообщает о ходе мыслей, которые привели его к требуемым построениям. Он сначала быстро и просто строит величины, полученные им при помощи алгебраического анализа задачи. Затем конструирует из этих величин искомую фигуру и, наконец, доказывает, что эта фигура как раз обладает требуемыми свойствами.

В качестве примера разберём выполненное Теэтетом построение правильного тетраэдра, вписанного в шар заданного диаметра

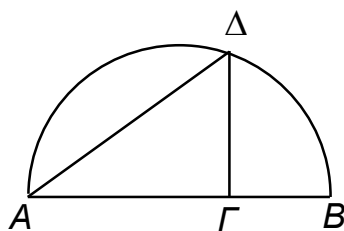


Рис. 17

AB (13, XIII). Вначале сразу объявляется, что квадрат на диаметре будет в полтора раза больше, чем квадрат на стороне тетраэдра. Чтобы быстро и изящно построить эту сторону и другие величины, необходимые для построения тетраэдра, автор делит заданный диаметр AB точкой G в отношении 2:1 (рис. 17), чертит на AB полуокруг, восставляет в G

перпендикуляр, пересекающий полуокружность в точке Δ , проводит

$A\Delta$. Тогда $A\Delta^2 = \frac{2}{3} AB^2$, т.е. $A\Delta$ есть искомая сторона, AG – высота пирамиды, а $\Gamma\Delta$ – радиус окружности, описанной около основания. Всё это автор, очевидно, уже знает заранее, но не выдаёт нам, как он это нашёл. Затем (рис. 18) в круге с радиусом $\Gamma\Delta$ он строит равносторонний треугольник, восстанавливает в его центре перпендикуляр, равный AG , и заканчивает построение пирамиды. После этого он доказывает, что её грани суть равносторонние треугольники и что весь многогранник можно вписать в шар с диаметром AB .

Доказательство (в свободном пересказе). Примем отрезок GB за единицу длины. Тогда квадрат, построенный на отрезке AG , будет содержать четыре, а квадрат на $\Delta\Gamma$ – два единичных квадрата. Отсюда, по теореме Пифагора, следует, что квадрат на $A\Delta$ содержит шесть единичных квадратов.

Обратимся теперь к рисунку 18. Известно, что квадрат, построенный на стороне правильного треугольника, в три раза больше квадрата, построенного на радиусе описанной окружности ($x = \sqrt{3}r$). Так как квадрат на радиусе $\Delta\Gamma$, как мы установили выше, содержит два единичных квадрата, то квадрат на стороне вписанного треугольника содержит шесть единичных квадратов. Отсюда следует, что сторона такого треугольника, как и утверждал Теэтет, равна отрезку $A\Delta$. Если в точке Γ восстановить перпендикуляр к плоскости круга, равный AG , и точку A соединить с точкой Δ , то получим треугольник $A\Delta\Gamma$, равный одноименному треугольнику на рисунке 16. Таким образом, отрезок ΔA является ребром тетраэдра. Из того же рисунка видно, что отрезок AB будет диаметром сферы, описанной около построенного тетраэдра.

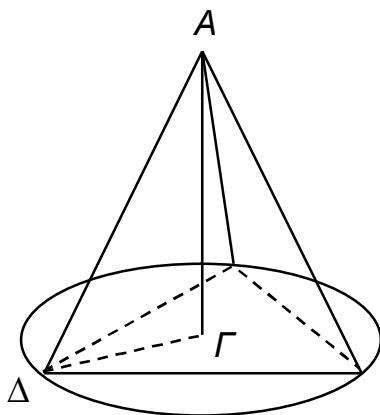


Рис. 18

Часть книги, принадлежащая Теэтету, заканчивается предложением относительно сравнения величин рёбер пяти Платоновских тел. От себя Евклид прибавляет ещё, что, кроме упомянутых пяти, нельзя построить никакого тела, ограниченного равносторонними и равноугольными, равными друг другу многоугольниками. В такой формулировке предложение неправильно, и нет никаких оснований приписывать её Теэтету, тем более что само доказательство ниже предшествующих по логической строгости.

5. Евдокс. Теория подобия. О Евдоксе известно, что он изучал математику у Архита в Таренте и медицину в Сицилии. На 23-м году жизни он приехал в Афины изучать философию и риторику. Он был так беден, что ему пришлось поселиться в гавани Пирея, откуда нужно было – два часа туда и два часа обратно – ходить в Академию Платона. Через несколько лет его друзья помогли ему совершить путешествие в Египет. Там он изучал астрономию у жрецов и производил наблюдения в обсерватории. После этого Евдокс в Кизике на Мраморном море основал школу, которая привлекла большое количество учеников. Около 365 года он ещё раз приезжал в Афины с учениками. В это время он пользовался большим уважением и рассуждал с Платоном о философских вопросах, об идеях и о высшем благе. Евдокс был знаменит не только как математик, но и как медик, а прежде всего, как астроном. Кроме того, он был замечательным оратором, философом и географом. Умер Евдокс высокочтимым законодателем в своём родном городе Книде на Чёрном море.

Теория подобия. Как мы уже отмечали, открытие несоизмеримых разрушило учение пифагорейцев об отношениях, пропорциях и подобии. Нужно было искать новые подходы. Например, если величины a, b, c, d были отрезками, то пифагорейцы в основу проверки

равенства двух отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ могли положить равновеликость

прямоугольников, построенных на отрезках ad и bc , или основанное на теореме Фалеса требование параллельности прямых AC и BD , соединяющих концы отрезков, специальным образом расположенных на сторонах угла (рис.19). Но если речь шла не об отрезках,

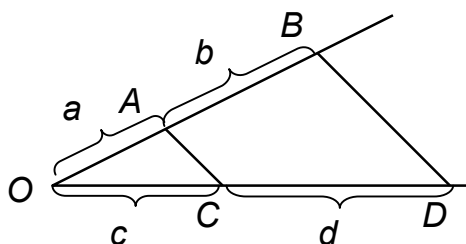


Рис.19

или хотя бы не только об отрезках, то такие подходы не годились. Как предполагают, Теэтет для сравнения двух отношений на предмет их равенства применял антантайресис. Он считал, что две величины a и b пропорциональны величинам c и d , если поочередное вычитание меньшей из большей для a и b протекает совершенно так же, как для c и d , т.е. когда a можно вычесть из b (или b из a) такое же число раз, как c из d (или d из c), и точно так же для остатков и т.д. Использование этого определения было сопряжено с определенными трудностями. Ведь сколь бы далеко мы не продвинулись в антантайресисах, это не

для a и b протекает совершенно так же, как для c и d , т.е. когда a можно вычесть из b (или b из a) такое же число раз, как c из d (или d из c), и точно так же для остатков и т.д. Использование этого определения было сопряжено с определенными трудностями. Ведь сколь бы далеко мы не продвинулись в антантайресисах, это не

доказывает их совпадения при продолжении процесса. Поэтому приходилось прибегать к косвенным методам доказательства.

В первой четверти 4-го века Евдокс разработал свою теорию отношений и пропорций. В её основу он положил известное еще ранним пифагорейцам свойство пропорции: если $a:b=c:d$, то при любых целых числах m и n будет верным и равенство $ma:nb=mc:nd$. Отсюда следовало, что если $ma > nb$, то $mc > nd$; если $ma = nb$, то $mc = nd$, наконец, если $ma < nb$, то $mc < nd$.

Это свойство Евдокс взял в качестве определения равенства двух отношений. В современных обозначениях оно может быть сформулировано следующим образом: "Если при любых целых числах m и n либо $ma > nb$ и $mc > nd$, либо $ma = nb$ и $mc = nd$, либо $ma < nb$ и $mc < nd$, то $a:b=c:d$ ".

Сам Евдокс свое определение (в пятой книге "Начал" оно значится под номером 5) сформулировал следующим образом: "Говорят, что величины находятся в том же отношении первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответствующем порядке".

Помимо этого определения, Евдокс ввел отношение порядка: $a:b > c:d$, если существует такая пара целых чисел m и n , что $ma > nb$, а $mc \leq nd$.

Затем он выводит различные свойства отношений и правила преобразования пропорций.

Считается, что весь относящийся к этому вопросу материал, составляющий содержание 5-й книги "Начал" Евклида, разработан Евдоксом. Начинается она восемнадцатью определениями и содержит 25 предложений.

Из определений приведем только одно, четвертое, которое потребуется нам в дальнейшем: "Говорят, что величины *имеют отношение* между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга".

В качестве примера рассмотрим доказательство того, что средние члены пропорции можно менять местами, то есть: если $A:B=C:D$, то и $A:C=B:D$ - предложение (16, V).

Доказательство основывается на трех ранее доказанных предложениях: (11,V), (14,V), (15, V).

Предложение 11. Если $A : B = C : D$ и $C : D = E : F$, то $A : B = E : F$.

Предложение 14. Если $A : B = C : D$ и $A > C$, то и $B > D$.

Предложение 15. При любом целом числе m , $A : B = mA : mB$.

Доказательство: По условию $A : B = C : D$. Возьмем любых два целых числа m и n , тогда по (15,V) получим, что $A : B = mA : mB$ и $C : D = nC : nD$. По свойству (11, V) и начальному условию можно заключить, что $mA : mB = nC : nD$. Теперь по (14,V) можно заключить, что

если $mA > nC$, то и $mB > nD$,

если $mA = nC$ то и $mB = nD$,

если $mA < nC$ то и $mB < nD$.

Согласно же определению 5, это означает, что $A : C = B : D$.

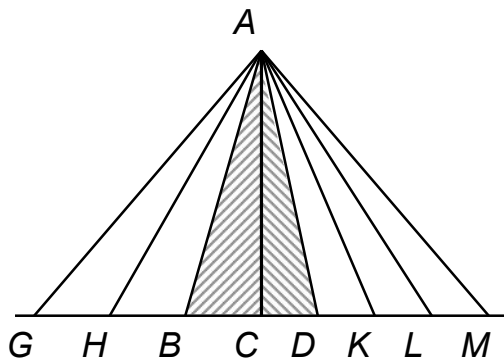


Рис. 20

В шестой книге, опять таки приписываемой Евдоксу, разработанная им теория отношений применяется к построению теории подобия. Как Евдокс использовал свое определение при доказательстве геометрических теорем, рассмотрим на примере доказательства того, что площади двух треугольников с равными высотами относятся как длины их оснований (предложение 1 из шестой книги "Начал").

Рассмотрим два треугольника ABC и ACD и докажем, что $BC : CD = \Delta ABC : \Delta ADC$.

Действительно, отложим отрезок BC от точки C влево m раз, а отрезок CD от той же точки C вправо n раз (на рисунке $m = 3$, а $n = 4$). Тогда $GC = mBC$, а $CM = nCD$

Теперь точку A соединим с концами отложенных отрезков. Так как BH и HG равны BC , то треугольники AGH и AHB равны треугольнику ABC (38, I) и, следовательно, $\Delta AGC = m\Delta ABC$. Аналогично $\Delta ACM = n\Delta ACD$.

Если $mBC > nCD$, то есть $CG > CM$, то $\Delta ACG > \Delta ACM$, то есть $m\Delta ABC > n\Delta ACD$. Аналогично, если $mBC = nCD$, то $m\Delta ABC = n\Delta ACD$, и если $mBC < nCD$, то $m\Delta ABC < n\Delta ACD$.

Отсюда, по определению 5 Евдокса, $BC : CD = \Delta ABC : \Delta ADC$.

6. Метод исчерпывания Евдокса. В математических теориях Древней Греции рано определился класс проблем, для решения которых приходилось использовать *нестрогие* предельные переходы.

Обычно для этого строилась последовательность, чаще всего монотонно возрастающая, члены которой, обладая определенными свойствами, в том или ином смысле неограниченно приближались к исследуемой величине. Если такую последовательность удавалось построить, то свойство её членов переносили на исследуемую величину. Вспомним, например, что Гиппократ при доказательстве квадратуемости своих "луночек" пользовался утверждением, что круги относятся как квадраты, построенные на их диаметрах. В 5-м веке, когда Гиппократ писал свой трактат, не существовало способов строгого доказательства этого утверждения. Зато было известно и строго доказано, что площади правильных одноименных многоугольников относятся как квадраты на диаметрах описанных около них окружностей. Рассуждения, скорее всего, строились следующим образом: в два данных круга вписывались правильные одноименные многоугольники с большим числом сторон. Так как отмеченная выше пропорциональность сохранялась при любом числе сторон и, следовательно, при любой близости многоугольников к содержащим их кругам, то естественно было ожидать, что эта пропорциональность выполняется и для этих кругов.

После критических выступлений Зенона, неудачных попыток Антифона решить задачу квадрирования круга и, наконец, попыток применить атомистическую теорию Демокрита к вычислению объема конуса, а возможно и других тел, отношение математиков к таким «наивным», нестрогим предельным переходам и вообще к использованию в математике понятия бесконечности изменилось. Все чаще стали прибегать к методу доказательства от противного. Первый пример, когда удалось успешно «обойти» бесконечность, представляет собой доказательство несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Предполагают, что сначала она была открыта с помощью антанайресиса. Однако использование понятия бесконечности этого процесса беспокоило древнегреческих геометров. Успокоились они тогда, когда несоизмеримость была доказана методом от противного, опирающимся на учение пифагорейцев о четных и нечетных числах.

Затем ситуация повторилась. Сначала Феодор доказал несоизмеримость стороны единичного квадрата со стороной квадрата, содержащего целое, но не квадратное число единичных квадратов от 3 до 17. По-видимому, его доказательство, использовавшее понятие бесконечного процесса, опять таки удовлетворило далеко не всех математиков. И только после того как Теэтет, используя свою теорию иррациональностей, доказал этот факт методом от против-

ного и, что особенно важно, в общем виде, математики, надо полагать, успокоились.

Естественно, что в тот период встала проблема строгого обоснования всех утверждений, полученных нестрогими, с использованием понятия бесконечности, способами. Как утверждают древние авторы, такой метод был разработан Евдоксом. С его помощью в 12-й книге «Начал» без использования понятия бесконечности и нестрогих предельных переходов доказываются следующие утверждения: «Круги относятся, как квадраты на их диаметрах», «Шары относятся, как кубы на их диаметрах», «Конус составляет треть от цилиндра, имеющего с ним общее основание и высоту», то же самое и для пирамиды. Позже этим методом в несколько видоизмененной форме с большим успехом пользовался Архимед. В XVII веке метод Евдокса был назван «методом исчерпывания».

Метод исчерпывания основывался на следующем, сформулированном, очевидно, Евдоксом, предложении (1, X): «Для двух заданных неравных величин, если от большей отнимается больше половины и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины". Доказательство этого предложения, в свою очередь, основывалось на так называемой аксиоме Евдокса - Архимеда, которая в неявном виде присутствует в приведенном выше определении однородных величин (4, V).

С самим методом «исчерпывания» мы познакомимся, рассмотрев предложение 2-е из 12-й книги «Начал» Евклида: «Круги будут друг к другу как квадраты на диаметрах». Доказательство адаптировано современной символикой.

Пусть K_1 и K_2 , соответственно, первый и второй круги (их площади), а D_1 и D_2 – их диаметры. Требуется доказать, что

$$K_1 : K_2 = D_1^2 : D_2^2$$

Доказательство от противного. Предположим, что $D_1^2 : D_2^2 \neq K_1 : K_2$. Тогда существует площадь R такая, что $D_1^2 : D_2^2 = K_1 : R$ (1). Предположим, что $K_2 > R$, и обозначим $\Delta = K_2 - R$. Впишем в K_2 квадрат $A_2 D_2 B_2 C_2$ и обозначим его площадь $S_2^{(1)}$.

Легко видеть, что $S_2^{(1)}$ больше половины K_2 , поэтому, отнимая $S_2^{(1)}$ от K_2 , мы вычерпываем больше половины. Остаток состоит из

четырёх сегментов. Потом, удвоив число сторон, получим восьмиугольник $S_2^{(2)}$. Так как каждый из дополнительно «вычерпнутых» треугольников, таких, как $A_2E_2C_2$, больше половины описывающего его сегмента то вновь образовавшийся остаток (на этот раз он состоит из 8-ми сегментов) будет меньше половины предыдущего остатка.

Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока очередной остаток $K_2 - S_2^{(n)}$ не станет меньше $\Delta = K_2 - R$. То, что это произойдет через конечное число шагов, гарантирует предложение (1, X). Из неравенства $K_2 - S_2^{(n)} < \Delta = K_2 - R$ следует, что $S_2^{(n)} > R$ (2).

Впишем теперь в K_1 многоугольник $S_1^{(n)}$, подобный $S_2^{(n)}$. Тогда по предложению (1, XII) $D_1^2 : D_2^2 = S_1^{(n)} : S_2^{(n)}$. Из этой пропорции и пропорции (1) $D_1^2 : D_2^2 = K_1 : R$ следует, что $K_1 : R = S_1^{(n)} : S_2^{(n)}$. Переставляя внутренние члены пропорции, получим

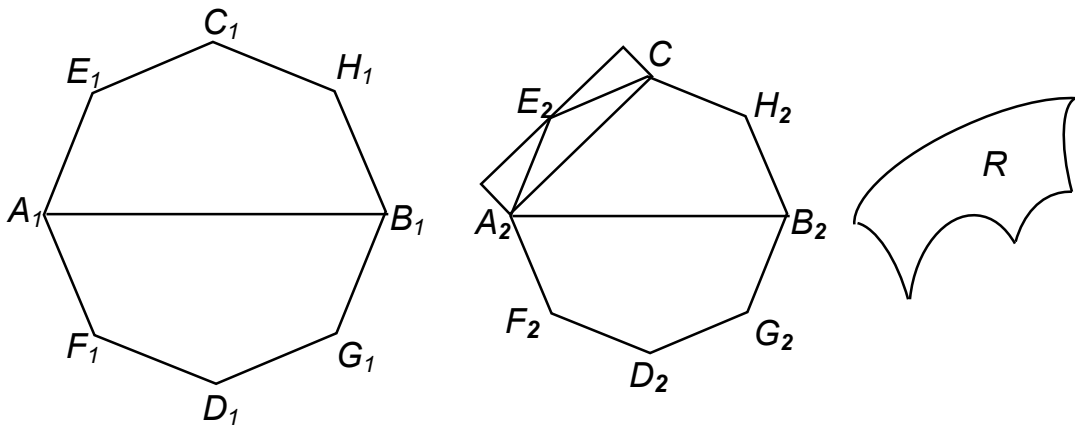


Рис. 21

$K_1 : S_1^{(n)} = R : S_2^{(n)}$. Но $K_1 > S_1^{(n)}$, следовательно, $R > S_2^{(n)}$, что противоречит условию (2) $S_2^{(n)} > R$.

Таким образом, предположение, что $K_2 > R$, приводит к противоречию.

Случай, когда $K_2 < R$ может быть приведен к первому, если поменять местами оба круга; следовательно, и этот случай приводит к противоречию.

Таким образом, $K_1 : K_2 = D_1^2 : D_1^2$, что и требовалось доказать.

Таким же логически безукоризненным, но утомительным окольным путём в XII книге «Начал» доказываются все упомянутые выше предложения о пирамиде, конусе и шаре.

Термин «исчерпывание» не должен вводить в заблуждение. В рассмотренном выше доказательстве при помощи вписывания многоугольников (в других случаях это, естественно, будут уже другие фигуры) с постоянно возрастающим числом сторон круг не может быть исчерпан полностью. На самом деле вычерпывание правильных многоугольников прекращается после конечного числа шагов, когда оставшаяся от круга площадь становится меньше произвольно заданной величины Δ .

В этом доказательстве вполне отчетливо содержится современное понятие о пределе: вписываемые многоугольники приближаются к кругу в самом строгом смысле так, что разность между ними может быть сделана меньше произвольно заданной площади.

Для применения метода Евдокса надо было заранее знать результат, который, как правило, находили каким-либо другим способом, например, нестрогим, интуитивным предельным переходом. Метод же «исчерпывания» использовался на заключительном этапе для доказательства верности высказанного предположения. Сам этот метод, помимо идеи сколь угодно точного приближения, основывается на двух основных положениях: учении о пропорциональности, изложенного в пятой книге «Начал», и методе доказательства от противного.

6. Менехм и конические сечения. Менехм, ученик Евдокса, прославился как астроном и математик. По словам Прокла, он увеличил число сфер в планетной системе Евдокса и Клиппа. Он писал об основаниях геометрии, о двух значениях термина «Начало» и о различии между теоремой и проблемой. Крупнейшее достижение, которое приписывается Менехму, – это открытие конических сечений, которыми он воспользовался для решения делийской задачи. Его исследования содействовали изменению облика древнегреческой математики, которая в поисках решения так называемых «неразрешимых» задач все больше внимания стала уделять линиям, отличным от прямых и окружностей. Одну из первых таких линий – квадратрису, – как вы уже знаете, еще в пятом веке, ввел Гиппий, построивший её для решения задачи о трисекции угла. Следующий шаг в этом направлении уже в начале IV века сделал Архит, использовавший для решения делийской задачи пространственные кривые, построенные на цилиндрической поверхности. Наконец, во второй половине четвертого века сам Менехм для решения все той

же делийской задачи использовал конические сечения, а его брат Динострат показал, как, используя квадратрису, решить задачу о квадратуре круга.

Для того чтобы для решения делийской задачи использовать конические сечения, надо было, с одной стороны, показать эквивалентность непрерывной пропорции $a : x = x : y = y : b$ системе неопределенных уравнений $x^2 = ay$ и $xy = ab$ или $y^2 = bx$, а с другой стороны, знать или показать, что первое и третье из этих уравнений являются «симптомами» (геометрическими формами уравнений) параболы и гиперболы соответственно. По свидетельству комментаторов, Менехм, строя конические сечения, рассматривал только прямые круговые конусы, а сечения проводил перпендикулярно одной из образующих.

Он ещё не пользовался терминами «парабола» и «гипербола», которые были введены позднее Аполлонием, а классифицировал конические сечения по величине угла при вершине конуса: сечение

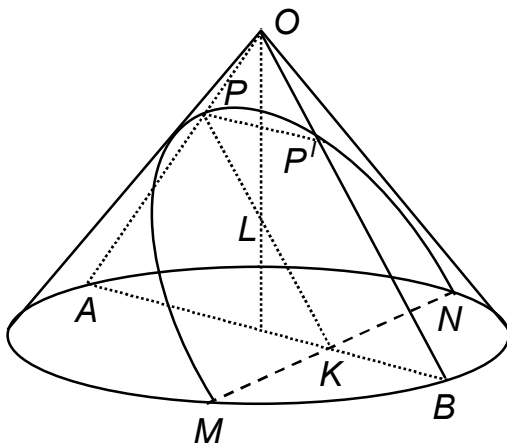


Рис. 22

прямоугольного конуса (парабола), сечение тупоугольного конуса (гипербола) и сечение остроугольного конуса (эллипс).

Неизвестно, как Менехм, пользуясь таким определением конических сечений, выводил их «симптомы». Можно только предполагать, что этот вывод схож с тем, которым позже, уже в третьем веке, пользовался Аполлоний при выводе симптомов в более общем случае. Исходя из такого

предположения, рассмотрим, каким мог бы быть вывод симптома сечения прямоугольного конуса (параболы).

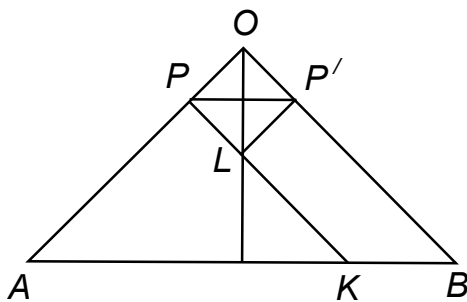


Рис. 23

Пусть OAB – осевое сечение этого конуса, а PLK – след секущей плоскости, перпендикулярной к образующей OA (рис. 22). Тогда $KM^2 = AK \cdot KB$, так как AMB – полуокруг, в котором KM – полухорда.

Если теперь воспользоваться вынесенным в плоскость чертежа сечением AOB (рис.23), то легко видеть,

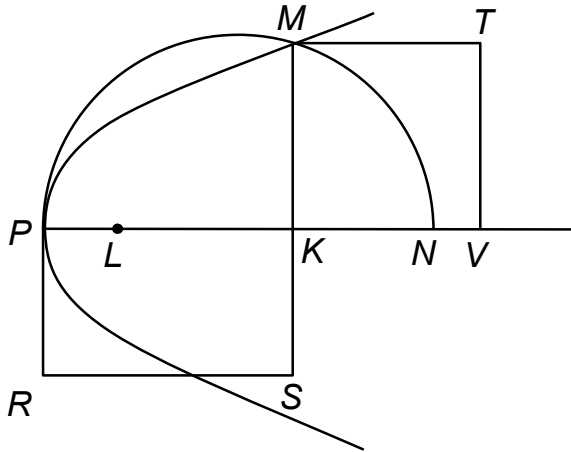


Рис. 24

что $KB = PP' = LP \cdot \sqrt{2}$, т.к. PP' – гипотенуза, а PL – катет равнобедренного прямоугольного треугольника PPL . Аналогично $AK = PK \cdot \sqrt{2}$ из прямоугольного равнобедренного треугольника AKP . Поэтому

$KM^2 = PK \cdot \sqrt{2} \cdot LP \cdot \sqrt{2} = 2PK \cdot LP$ и есть симптом параболы.

С его помощью можно построить сколько угодно точек параболы. Пусть, например, дана ось параболы PK и на ней точка L ($PL = \rho$) – основной параметр параболы (рис.24). Возьмём на оси параболы произвольную точку K .

Для того чтобы построить точку M параболы, соответствующую точке K оси, построим прямоугольник $PKSR$, в котором $PR = 2PL$. Затем циркулем и линейкой преобразуем прямоугольник $PKSR$ в квадрат $KMTV$. Для этого, отложив отрезок $KN = KS$, строим на PN полуокруг PMN , где M – точка пересечения построенной полуокружности с продолжением отрезка KS . Тогда точка M и будет искомой точкой параболы.

Замечание: если KP обозначить буквой x , а KM – буквой y и учесть, что $PL = \rho$, то получим известное нам уравнение параболы $y^2 = 2\rho \cdot x$.

Используя этот симптом, можно было на плоскости построить любое количество точек, располагая их как угодно плотно. И все же такое построение существенно отличалось от построения прямой или окружности, для которых существование линейки и циркуля в определенной мере обеспечивало непрерывность, чего нельзя было сказать о кривых, построенных «по точкам». Естественно, возникла задача создания приборов, которые позволяли бы вычерчивать такие линии непрерывным движением «пера». Но об этом речь пойдет позже.